RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE DJILLALI LIABES DE SIDI BEL ABBES

LABORATOIRE DES MATERIAUX & HYDROLOGIE

FACULTE DE TECHNOLOGIE
DEPARTEMENT DE GENIE CIVIL & TRAVAUX PUBLICS

THESE DE DOCTORAT EN SCIENCES

Spécialité : **Génie Civil**
Option : **Structures et Matériaux**
Présentée par

Mr. CHAREF Tayeb

Intitulé de la thèse

Contribution à la compréhension du comportement mécanique des structures en matériaux composites Avancés

Soutenu le / / 2023 devant le Jury composé de :

Mr. TOUNSI Abdelouahed	Professeur	UDL-SBA	**Président**
Mme. BACHIR BOUIADJRA Rabbab	MCA	U-MASCARA	**Rapporteur**
Mr. BENYOUCEF Samir	Professeur	UDL-SBA	**Co-Rapporteur**
Mr. BOURADA Mohamed	Professeur	UDL-SBA	**Examinateur**
Mr. MEKSI Abdeljalil	MCA	USTO-MB	**Examinateur**
Mr. SADOUNE Mohamed	MCA	U- MASCARA	**Examinateur**

Année universitaire 2023-2024

بسم الله الرحمان الرحيم

REMERCIEMENTS

Ce travail a été réalisé au sein du Laboratoire de recherche LMH du département de génie civil et de travaux publics de l'Université de SIDI BELABBES. Que toute l'équipe qui travaille dans ce laboratoire trouve l'expression de ma profonde gratitude.

Je tiens à remercier **M^me^ BACHIR BOUIADJRA Rabbab**, Enseignante à l'Université de MASCARA, Directrice de cette thèse, pour son acceptation d'encadrement, son soutien, ses conseils et sa confiance à mon égard durant toute la période de ce travail.

Monsieur BENYOUCEF Samir, Professeur de l'Université de SIDI BEL ABBES : Son soutien, son encadrement durant l'élaboration de cette thèse, ainsi que son assistance et ses conseils objectifs, qui m'ont été grandement profitables, Je lui reste redevable pour la réalisation de ce travail,

Monsieur TOUNSI Abdelouahed, Professeur de l'Université de SIDI BEL ABBES, qui m'a fait l'honneur de présider le jury de soutenance. Je lui en suis sincèrement reconnaissant,

Je tiens à remercier également le professeur **BOURADA Mohamed** enseignant à l'Université de SIDI BELABBES**, le Docteur MEKSI Abdeljalil** enseignant à l'Université des Sciences et de la Technologie d'Oran Mohamed-Boudiaf **et le Docteur SADOUNE Mohamed,** enseignant à l'Université de MASCARA pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail en acceptant de l'examiner.

Cette thèse de doctorat n'aurait peut-être pas abouti sans l'aide et les encouragements des personnes suivantes, que je tiens à associer à ces remerciements : **Docteur ATTIA Bachiri** enseignant à l'Université de Laghouat, et **Docteur SEKKAL Mohamed** de l'USTHB d'Alger.

Je profite aussi de cette occasion solennelle pour adresser mes remerciements à toute ma famille qui m'a toujours encouragée et soutenue tout au long des années de cette étude.

Je remercie enfin tous ceux qui n'ont pas été cités dans ces quelques lignes et qui ont contribué de près ou de loin par leur aide au bon déroulement de ce travail.

DEDICACE

A ma chère fille qui m'a quitté son prévenir Meriem el batoul, et qui restera dans mon cœur pour l'éternité.
A mes parents très cher,
A ma femme rekia qui m'a toujours soutenu,
A mes filles : Wafa, Asma, et Fatima,
Ames garçons : Abderrezak et Islam,
A mes petites filles ibtissam et l'Ujjain

Á toute la famille charef, khedama, ben Mansour et chibani.

À tous ceux qui m'ont encouragé à continuer mes études et entamer ce travail ; malgré la maladie, la fatigue et l'âge.

ملخـــــــــــــــــــــص

في هذا العمل، تم تقديم حلول تحليلية للسلوك الديناميكي الحراري لعارضة (رافدة) مسامية ثنائية الاتجاه متدرجة وظيفيًا تستند على دعامات مختلفة بواسطة نظرية التشوه القصي ثلاثية الابعاد العارضة مكونة من مادتين مختلفتين تماما هما الحديد والسيراميك علما ان خصائص المادة ملساء ومتغيرة في الاتجاه الطولي وفي اتجاه السماكة وفق قانون القوة العوارض مستندة استنادا بسيطا على أنواع مختلفة من الاساسات (Winkler, Pasternak, Variable, Kerr et viscoélastique)
تم ايجاد المعادلات الحاكمة تحليليا من خلال نموذج شبه ثلاثي الابعاد بعدها تم استخدام طريقة نافييه (Navier) لإيجاد الحلول المختلفة ثم تمت مناقشة تأثير مختلف الخصائص والعوامل مثل الدليل الحبيبي ,نوع الاساس ,والمسامية على الازاحات والاجهادات على العارضة (BDFG) بطريقة تفصيلية.

الكلمات المفتاحية : العوارض المتدرجة وظيفيا ثنائية الابعاد - المسامية – النموذج شبه ثلاثي الابعاد – الاساسات المختلفة – الديناميكا الحرارية .

Résumé

Dans ce travail, une solution analytique est présentée pour l'étude du comportement thermodynamique des poutres poreuses bidirectionnelles fonctionnellement gradués (BDFG) reposant sur différents supports au moyen d'une théorie de déformation par cisaillement quasi-3D. Les poutres sont composées de deux matériaux distincts, et leurs propriétés sont supposées variant à la fois dans le sens de la longueur et de l'épaisseur selon une simple loi de puissance. Les poutres sont censées être simplement appuyées et supportées par différents types de fondations comme Winkler, Pasternak, Variable, Kerr et viscoélastique. Les équations gouvernantes sont trouvées analytiquement par la moyenne d'un modèle quasi-3D présenté, puis la méthode de Navier est utilisée pour obtenir les différentes solutions. L'impact des caractéristiques de divers facteurs comme les indices granulométriques et le type de fondation, la porosité sur les déplacements et les contraintes de la poutre BDFG reposant sur une fondation élastique est discutée en détail.

Mots-clés : Poutres fonctionnellement graduées bidirectionnelles · Porosité · Modèle quasi-3D · Fondation élastique · chargement thermodynamique

Abstract

In this work, analytical solutions are presented for the thermodynamic behaviour of bidirectional functionally graded (BDFG) porous beam lying on different supports by the mean of a quasi-3D shear deformation theory. The beams are composed of two distinct materials, and the material properties are expected to be smooth varying in both length and thickness direction according to a simple power law. The beams are supposed to be simply supported and lying on various types of foundations such Winkler, Pasternak, Variable, Kerr, and viscoelastic. The governing equations are found analytically by the mean of the presented quasi-3D model, and then, Navier's method is used to obtain the different solutions. The impact of the characteristics of various factors like the grading indexes and type of foundation, porosity on the displacements, and stresses of the BDFG beam lying on elastic foundation is discussed in detail.

Keywords : Bidirectional functionally graded beams · Porosity · Quasi-3D model · elastic foundation · Thermodynamic.

Table des matières

REMERCIEMENTS……. I
RESUME…….. II
TABLE DES MATIERES…… V
LISTE DES FIGURES ET DES TABLEAUX…… VII
LISTE DES NOTATIONS…….. IX
INTRODUCTION GENERALE…….. 1

CHAPITRE I : GENERALITES SUR LES MATERIAUX FGM

I.1. Introduction…… 5
I.2. bref historiques sur les fgms……. 5
I.3. concept des FGMs…… 6
I.4. fabrication des fgms…… 7
I.5. domaine d'application des FGM…… 8
I.6. Méthodes d'Homogénéisation des FGMs……. 12
I.6.1 Loi exponentielle E-FGMs…… 12
I.6.2 Loi des puissances P-FGMs……. 13
I.6.3 loi de distribution sigmoide S-FGM. …….. 14
I.7 Conclusion……... 15

CHAPITRE II : THEORIES DES POUTRES

II.1 Introduction…….. 16
II.2. Théorie classique des poutres Euler-Bernoulli …… 17
II.3. Théorie de déformation de cisaillement du premier ordre Timoshenko……. 19
II.4. la théorie de déformation en cisaillement en d'ordre élevé (REDDY)…….. 23
II.5. conclusion…… 29

CHAPITRE III : ETUDE DU COMPORTEMENT THERMODYNAMIQUE DES POUTRES FG BIDIRECTIONNELLES POREUSES

III.1 Introduction …… 31

III.2 effet de porosité…… 31

III.3. Système de fondation……. 34

III.4 équation de mouvement…… 36

III.5. équation d'équilibre…… 39

III .6 Solution analytique pour les poutres poreuses BDFG simplement soutenues … 39

III.7. conclusion…….. 41

Chapitre IV : Discussion des résultats et analyse

IV.1 Introduction…… 42

IV.2 Etude paramétrique……. 42

IV.3 Conclusion…… 49

CONCLUSION GENERALE…….. 51

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES…… 53

Liste des figures

Figure I.1: Les principaux domaines d'application des FGM…….. 11

figureI.2 Distribution de module de Young à travers l'épaisseur d'E-FGMs… 13

Figure I.3 Variation de la fraction volumique dans une plaque P-FG……... 14

Figure I.4 Variation du module de Young dans une plaque. S-FGM…… 14

Figure II.1 Schéma de principe de la théorie classique des poutres…….. 18

Figure II.2 schéma de principe de la théorie des poutres de Timoshenko *(*FSDT*)*…….. 20

Figure II. 3: Variation de la fonction de gauchissement *f(z) = z et f '(z)* suivant l'épaisseur... 21

Figure II.4 la distribution (constante) des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseurdans la théorie de Timoshenko…….. 22

Figure II.5 Illustration de la poutre d'ordre élevé…… 24

Figure II.6 la distribution (variable) des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseurdans la théorie d'ordre élevé…… 25

Figure II.7: Variation de la fonction de forme f(z) des différents modèles en fonction de l'épaisseur……. 27

Figure II.8: Variation de la dérivée de la fonction de forme f'(z) des différents modèles suivant l'épaisseur……...… 28

Figure II.9 la distribution (variable) des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseurdans la théorie d'ordre élevé …… 28

Figure III 1. Géométrie et coordonnées de la Poutre poreuse BDFG reposant sur une fondation élastique…… 31

Figure III.2 représentation d'un BDFG bidirectionnel avec de types de distributions de porosité…….. 32

Fig. IV. 1 Effet de la fondation élastique variable sur les déplacements et les contraintes de la poutre poreuse BDFG sous chargement thermodynamique…… 44

Fig. IV.2. Effet de la fondation élastique de Kerr sur les déplacements et les contraintes de la poutre poreuse BDFG sous chargement thermodynamique…… 45

Fig.IV.3. Effet de la fondation viscoélastique sur les déplacements et les contraintes de la poutre poreuse BDFG sous chargement thermodynamique…… 46

Fig. IV. 4. Effet du type de fondation élastique sur les déplacements et les contraintes de la poutre poreuse BDFG sous chargement thermodynamique…… 47

Fig. IV. 5. Effet de la distribution de la porosité sur les contraintes de la poutre BDFG sous chargement thermodynamique reposant sur une fondation élastique linéaire…… 48

Fig. IV.6. Effet des indices de gradation sur les déplacements d'une poutre poreuse BDFG reposant sur une fondation élastique linéaire pour différents taux d'élancement…… 49

Liste des Tableaux

Tableau IV. 1 : Déplacements et contraintes d'une poutre parfaite FG bidirectionnelle sans fondation élastique…… 43

Liste des notations

h	Epaisseur de la poutre
b	La largeur de la poutre
L	La longueur de la poutre
p	Paramètre du matériau
$V(z)$	Fraction volumique en fonction de l'épaisseur
$E(z)$	Module de Young en fonction de l'épaisseur
$G(z)$	Module de Cisaillement en fonction de l'épaisseur
$\rho(z)$	La densité
$\upsilon(z)$	Coefficient de poisson en fonction de l'épaisseur
P_m	Propriètées matérielles de Métal
P_c	Propriètées matérielles de céramique
u	Déplacement suivant x
w	Déplacement suivant z
w_0	Déplacement transversal dû au flexion
θ	Déplacement transversal dû au cisaillement
(u_0, w_0)	Les déplacements au niveau du plan moyen (z=0)
φ_x , φ_y	Les rotations autour des axes x et y, respectivement.
$(\sigma_x, \sigma_z, \tau_{xz})$	Les composants des contraintes
$(\varepsilon_x, \varepsilon_z, \gamma_{xz})$	Les composants des déformations
i, j	Nombres naturelles
$f(z)$	La fonction de forme (fonction de gauchissement)
$g(z)$	fonction de cisaillement
$\int$	Intégrale indéterminée
k_1, k_2	Des coefficients dépendent de la géométrie
A', B'	Des coefficients dépendent de la solution utilisée (Navier)
λ	Nombre d'onde selon x

δ	Variation
δU	L'énergie de déformation de la poutre
δK	L'énergie cinétique de la poutre
f_e	Densité de la force de réaction de la fondation
k_w	Paramètre de Winkler
k_p	Paramètre de Pasternak
$\partial/\partial x$	Dérivée partielle par rapport à x
$g'(z)$	La première dérivée de la fonction $g(z)$
Q_{ij}	Les coefficients de rigidité
∇	Opérateur Laplacien
N	Effort normal résultant
M , M^b	Moment de flexion résultant
M^s , S^s	Efforts d'ordre élevé
$\boldsymbol{A_{ij}}$, B_{ij} , $\boldsymbol{D_{ij}}$	Composantes de rigidité
N, M et Q	Les contraintes résultantes
$\sum$	La somme
m	Nombre de mode selon x
n	Nombre de mode selon y
U_{mn},w_{mn}, x_{mn}	Paramètres arbitraires
K_w, K_p	Paramètre de la fondation sous forme adimensionelle
ω	Fréquence naturelle
$[K]$	La matrice de rigidité
a_{ij}	Coefficients de la matrice de rigidité
$[M]$	La matrice masse
$\{F\}$	Composantes du vecteur de force
$\{\ \}$	Vecteur colonne
$[\ ]$	Matrice

INTRODUCTION GENERALE

Les structures poreuses font l'objet d'une grande attention en tant que matériaux d'ingénierie avancés dans un large éventail d'applications, notamment l'ingénierie aérospatiale, les systèmes micro-électromécaniques, le secteur automobile et le génie civil, la biotechnologie, en raison de leur excellente polyvalence (faible poids, faible conductivité thermique et électrique, atténuation acoustique, etc. Les matériaux à gradient fonctionnel (FGM) ont attiré l'attention des chercheurs ces dernières années en raison de leurs excellentes propriétés mécaniques. En outre, la structure poreuse à gradient fonctionnel (FG) devient un domaine de recherche très intéressant et de nombreuses études ont été menées sur l'analyse du comportement des poutres FG, et plusieurs théories de poutres ont été développées.

Gao et al. (2021) ont étudié le flambage dynamique d'une poutre FG Euler-Bernoulli composée de plusieurs types de distributions de porosité avec une section transversale arbitraire et exposée à plusieurs charges de compression axiale. Jena et al. (2020) ont utilisé la théorie des poutres d'Euler-Bernoulli pour analyser la réponse dynamique d'une nanopoutre poreuse en fibre de verre reposant sur une fondation de Pasternak. Ils ont utilisé le type bi-Helmholtz d'élasticité non locale pour capturer l'effet à petite échelle du FG. Dans le cadre de la théorie de la thermoélasticité, Abouelregal et al. (2021) ont étudié l'impact de la conductivité thermique sur le comportement dynamique d'une nanopoutre en rotation. Ils ont utilisé la théorie de la poutre d'Euler-Bernoulli et la conduction thermique généralisée pour dériver les équations gouvernantes. Eltaher et al. (2018) ont utilisé des éléments finis selon la théorie de la poutre d'Euler pour analyser la flexion mécanique et le problème dynamique des nanopoutres poreuses FG. Ils ont proposé un nouveau modèle de porosité qui représente la porosité et le module d'Young sous une forme implicite. Tang et al. (2018) ont utilisé la théorie des poutres d'Euler-Bernoulli en conjonction avec la théorie des champs aléatoires gaussiens pour développer un modèle pour le comportement de flambage des poutres poreuses BDFG. Penna et al. (2021) ont examiné la réponse hygro-thermo-mécanique des poutres Euler nano-FG. Ils ont utilisé des modèles d'élasticité à gradient de contrainte et de déformation locaux/non locaux.

Dans le cadre de la théorie des poutres de Timoshenko, Chen et al. (2016a) ont examiné les vibrations forcées et libres d'une poutre imparfaite. De nouveau, et dans un autre travail, Chen et al. (2016b) ont examiné le problème dynamique non linéaire de la poutre poreuse sandwich FG. En utilisant la même théorie, Ghayesh (2019) a analysé le comportement de la poutre conique axialement FG avec des imperfections géométriques initiales dans la dynamique résonante non linéaire. Wu et al. (2018) ont examiné le problème dynamique libre et forcé dans les poutres imparfaites FG en utilisant la méthode des éléments finis (FEM) et les deux

théories du faisceau d'Euler Bernoulli et Timoshenko. Avcar (2019) a utilisé la théorie classique des poutres (CBT) et la théorie des poutres de déformation de cisaillement du premier ordre (FSDBT) pour analyser les caractéristiques dynamiques de deux types de poutres poreuses, FGM de loi de puissance (P-FGM) et FGM de loi sigmoïde (S-FGM). Hieu et al. (2021) ont étudié la vibration, le flambage et la flexion non linéaires de nanopoutres FG reposant sur des fondations élastiques au moyen de la théorie du gradient de déformation non local. Ils ont appliqué les théories des poutres de Timoshenko et d'Euler-Bernoulli pour formuler le problème.

Hamed et al. (2020) ont examiné la stabilité statique des poutres poreuses en sandwich FG sous des charges axiales de compression et de cisaillement non uniformes à l'aide de la théorie de la déformation par cisaillement d'ordre supérieur (HSDT) de Reddy. En utilisant la même théorie, le comportement thermo-mécanique des poutres imparfaites en fibre de verre a été étudié par Ebrahimi et Jafari (2016). Ils ont considéré plusieurs chargements thermiques. Babaei et al. (2020) ont utilisé la théorie de la déformation par cisaillement du troisième ordre pour analyser le problème du flambage dans une poutre poreuse FG avec une déflexion initiale et une porosité uniformément répartie. Ils ont considéré une charge thermique et la position du plan neutre physique.

Ebrahimi et al. (2020) ont utilisé une théorie à quatre raffinements pour le flambage thermique d'une poutre poreuse magnéto-électro-élastique FG. Plusieurs conditions aux limites ont été prises en compte. Liu et al. (2019) ont utilisé la théorie de la déformation par cisaillement sinusoïdale d'ordre élevé pour examiner le flambage thermomécanique des poutres poreuses en sandwich FG serrées dans un environnement thermique. Les effets de la porosité sur la flexion statique des poutres en fibre de verre ont été étudiés par Zghal et al. (2020). 3

Pour leur étude, ils ont développé un modèle de poutre par éléments finis raffiné d'ordre élevé. La vibration libre et l'instabilité des poutres poreuses en sandwich FG ont été étudiées par Fazzolari (2018). Pour cela, différentes théories hiérarchiques raffinées d'ordre supérieur ont été développées au moyen de la méthode d'expansion en série des composantes de déplacement. Hadji et Avcar (2021) ont examiné la réponse dynamique des nanopoutres poreuses FG à l'aide de la théorie de la poutre à déformation de cisaillement hyperbolique non locale (HSDBT). Ils ont pris en compte quatre distributions différentes de la porosité dans l'épaisseur. She et al. (2020) ont utilisé la théorie du gradient de déformation non local pour prédire la vibration de résonance forcée des nanopoutres poreuses FG incurvées. Gafour et al.

(2020) ont étudié la vibration des nanopoutres poreuses FG au moyen des relations constitutives différentielles non locales d'Eringen en conjonction avec la HSDT.

En utilisant la théorie modifiée des contraintes de couple en conjonction avec la théorie quasi-3D, Tlidji et al. (2021) ont examiné la vibration libre des micro-poutres poreuses. En utilisant la même méthodologie, Trinh et al. (2018) ont déterminé la fréquence naturelle des micro-poutres BDFG. Dans le cadre de la théorie modifiée des couples de contraintes, Ebrahimi et al. (2017) ont étudié la vibration de micro/nanobagues imparfaites FG soumises à des contraintes thermomécaniques. Jouneghani et al. (2018) ont analysé la réponse en flexion des poutres nanoporeuses FG soumises à des charges hygro-thermo-mécaniques en utilisant la théorie non locale d'Eringer. Akbas (2017) a utilisé un modèle d'éléments finis en conjonction avec la méthode de Newton-Raphson pour analyser le post-fléchissement des poutres poreuses FG soumises à une charge de compression. Dans un autre travail, le même auteur (Akbas 2018) a utilisé le modèle de continuum solide plan pour le comportement dynamique des poutres profondes poreuses FG sous charge dynamique. Les caractéristiques mécaniques de la poutre profonde FG changent dans la direction de l'épaisseur selon deux modèles de porosité uniforme et inégale.

He et al. (2022) ont adopté la méthode de séparation des variables pour les équations différentielles fractales afin d'évaluer l'impact de la porosité du béton sur la réponse de la température interne.

Jusqu'à présent, un certain nombre d'analyses ont été entreprises par un grand nombre d'auteurs pour étudier le comportement des poutres FG avec ou sans fondation élastique. Cependant, à la connaissance des auteurs et sur la base de l'analyse de la littérature, il n'existe aucun rapport sur l'étude du comportement thermodynamique d'une poutre poreuse à gradation fonctionnelle bidirectionnelle (BDFG) reposant sur des fondations élastiques.

D'autre part, les poutres sont l'un des composants essentiels des structures d'ingénierie, qui sont utilisées dans divers domaines de l'industrie tels que l'ingénierie mécanique, civile et spatiale. Elles peuvent être utilisées à différentes échelles telles que les niveaux micro, nano et macro, ce qui nécessite davantage de réflexion et de théories (Zghal et Dammak 2020). Par conséquent, cet article vise à étudier, pour la première fois, le comportement thermodynamique des poutres simplement soutenues constituées de matériaux poreux bidirectionnels à gradient fonctionnel et reposant sur diverses fondations.

Dans la présente étude, une théorie de déformation par cisaillement quasi 3D basée sur un champ de déplacement contenant des termes intégraux indéterminés est utilisée pour modéliser le problème. Ce champ de déplacement implique un terme intégral indéterminé et

satisfait aux conditions limites sur les deux faces de la plaque sans nécessiter de coefficients de correction du cisaillement. En outre, il implique un effet d'étirement en raison de sa nature tridimensionnelle. Les caractéristiques matérielles effectives des poutres changent à la fois dans le sens axial et dans le sens de l'épaisseur en suivant une loi de puissance modifiée. Plusieurs types de fondations élastiques sont considérés et leur effet sur le comportement des poutres poreuses est analysé. En utilisant le principe de Hamilton, les trois équations différentielles gouvernantes sont dérivées et la méthode de Navier pour les poutres simplement soutenues est employée pour résoudre le problème et déterminer les contraintes et les déplacements. Afin de montrer l'applicabilité et l'efficacité du modèle de calcul proposé et l'effet des différents paramètres, plusieurs exemples numériques ont été présentés et étudiés en détail.

Le présent travail est divise en deux parties : la première consiste en une partie bibliographique qu'elle est structurée en deux chapitres :

Le premier chapitre consiste à présenter des généralités sur les matériaux fgm en décrivant leur début, leurs constitutions, types et classification, leurs procédés de fabrication, et leurs domaines d'utilisation.

Le deuxième chapitre illustre la théorie des poutres du classique aux différentes théories, les différences qui existent entre elles. Il sera dédié à un rappel sur les théories des poutres existantes en montrant leur différence et leur limitation à savoir la théorie classique d'Euler-Bernoulli (CPT), la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT), la théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT), la théorie raffinée de déformation des poutres, et enfin la théorie quasi-3D de déformation des poutres.

La deuxième partie contient :

- Le troisième chapitre qui donne une solution mathématique utilisant un modèle de déformation de cisaillement quasi-3D pour résoudre l'effet de la distribution de la porosité dans le calcul des propriétés du matériau qui varient dans les deux sens de la poutre présenté. Le champ de déplacement utilisé comprend des termes intégraux indéterminés et ne fait intervenir que quatre fonctions inconnues. La poutre est considérée posé sur différentes assises élastiques.
- Le quatrième chapitre, une étude paramétrique détaillée est donnée pour démontrer les effets de différents facteurs comme la porosité, l'indice granulométriques etc….
- Enfin, une conclusion générale est présentée dans le but d'énuméré les principaux résultats obtenus. En plus, une perspective de ce travail est présentée.

CHAPITRE I

GENERALITES SUR LES MATERIAUX FGM

Chapitre I Généralités sur les Matériaux FGM

I.1. Introduction

Le développement de nouveaux matériaux dépend des besoins des utilisateurs (fabricants). Il existe une demande constante pour des matériaux plus performants, plus économiques et plus durables. Les chercheurs sont principalement obligés d'optimiser des solutions déjà utilisées, mais parfois ils doivent repenser complètement le problème et envisager de « nouveaux matériaux ». En fait, nous ne découvrons plus de nouveaux matériaux, mais créons de nouvelles combinaisons de matériaux. L'un des résultats de cet effort est le développement des matériaux composites. Les composites tirent la plupart de leurs propriétés mécaniques telles que la rigidité, la ténacité à la rupture et la dureté du matériau de renforcement d'une combinaison de deux ou plusieurs matériaux distincts. Une sélection appropriée des matériaux de renforcement peut également améliorer certaines propriétés physiques des composites, telles que : Le Comportement thermique, résistance à la température, résistance au feu, résistance à l'usure, propriétés électriques, etc. Vers 1984, un groupe de chercheurs japonais réussit à découvrir un nouveau type de matériau en associant métaux et céramiques. C'est le FGM (Functional Graded Materials).

I.2. Bref Historique sur les FGMs

Le concept de "matériaux fonctionnellement gradués" a été développé en 1984 par Niino et ses collègues du *Sendai Aerospace Research Institute* à Honshu, au Japon, et plus tard dans d'autres pays, comme l'Allemagne, la Suisse, USA, la Chine, et la Russie. L'idée est de produire des matériaux qui servent de barrières thermiques dans les structures spatiales et les réacteurs de fusion. Des changements continus dans la composition, la microstructure et même la porosité de ces matériaux produisent des gradients dans les propriétés des matériaux telles que la résistance mécanique et la conductivité thermique. Cette nouvelle classe de composites peut être utilisée dans une variété d'applications telles que les moteurs en céramique, les turbines à gaz et les revêtements de barrière thermique à couche mince optique. [**Valmik Bhavar et al, 2017**].

En 1987, le gouvernement japonais a lancé un projet à grande échelle intitulé "Développement de matériaux fonctionnellement gradués et recherche technologique de base sur la relaxation des contraintes thermiques". L'intérêt de ce projet est de développer des matériaux avec des structures à utiliser comme barrières thermiques dans les programmes aérospatiaux. 17 instituts nationaux de recherche, universités et entreprises ont participé à ce projet.

A la fin de la première phase (1987-1989), les chercheurs sont parvenus à produire de petites pièces expérimentales (1-10 mm d'épaisseur et 30 mm de diamètre) capables de supporter des températures jusqu'à 2000 K (température de surface) et des gradients de température de 1000 K.
L'objectif de la deuxième étape (1990-1991) était de produire des dimensions plus grandes et des géométries plus complexes par rapport aux pièces produites dans la première étape.
Dans les années 1990, le champ d'application des FGM a été non seulement développé pour les matériaux de structure fonctionnant à haute température, mais aussi élargi à d'autres applications.1992 était le moment d'améliorer l'efficacité des FGM dans l'économie d'énergie photoélectrique, thermoélectrique et thermonucléaire.

Sur la base de ces résultats, en 1993, un nouveau projet national, « Recherche sur les matériaux économes en énergie utilisant des surfaces fonctionnelles structurellement graduées », communément appelé « FGM Part II », a été lancé afin de faire progresser la science et la technologie. Le programme vise à utiliser la technologie FGM pour améliorer l'efficacité de la conservation de l'énergie telle que la production d'énergie photovoltaïque, nucléaire, photovoltaïque et thermoélectrique.
Actuellement, la recherche sur les FGM est activement menée partout dans le monde. Plusieurs programmes de recherche ont été lancés en Allemagne en 1995 et au Japon en 1996. Dans un programme allemand, 41 matériaux sont étudiés dans des universités et des laboratoires nationaux pour le traitement et la modélisation afin de développer des applications de FGM pour le 21e siècle. Le programme japonais est soutenu par l'université et couvre 67 sujets liés à la chimie et à la physique des FGM. Cependant, dans le développement de l'architecture des FGM, la continuité et la communication entre les chercheurs et les groupes de recherche se sont avérées très importantes. De nouvelles techniques pour les matériaux classés de manière non uniforme sont apparues à la suite des applications pratiques et des développements de la recherche au 21e siècle.

I.3. Concept des FGMs

Les matériaux à gradient fonctionnel constituent une nouvelle classe de matériaux composites dont les propriétés thermomécaniques varient dans l'épaisseur selon des lois fonctionnelles continues ou discrètes. Grâce à la structure particulière de ces matériaux, les concentrations de contraintes aux interfaces (provoquant le délaminage) peuvent être évitées et l'association des matériaux peut améliorer les propriétés mécaniques et thermiques de la pièce. Ces

matériaux sont de plus en plus utilisés dans l'aérospatiale, la biomécanique, l'automobile et de nombreuses autres applications techniques. Une solution passe par l'utilisation de matériaux composites, notamment de matériaux à gradients de propriétés. Un matériau à haute résistance thermique et à l'oxydation sur une surface exposée à de très hautes températures peut être imaginé comme suit. B. La céramique, dont la surface interne est un très bon conducteur de chaleur, a une meilleure résistance mécanique et une meilleure ténacité que le métal. Cependant, lorsque ces deux matériaux sont simplement assemblés, la rupture se produit rapidement en raison des contraintes thermiques agissant à l'interface entre les deux matériaux aux propriétés thermiques différentes. Idéalement, cette interface devrait être supprimée pour créer une transition continue entre les deux surfaces. En ajustant correctement la microstructure de transition, des distributions optimales de température, de déformation et de contrainte peuvent être obtenues. Cette capacité de personnalisation est nécessaire lors de la conception de structures thermiques aérospatiales et spatiales (moteurs, tuyères, revêtements thermiques, etc.). Ce concept a également été utilisé pour améliorer la résistance à la fatigue thermique et la durabilité des revêtements de protection incendie. En général, le FGM est un matériau multicouche contenant différents composants tels que la céramique et les métaux. Les vides sont également considérés comme faisant partie du matériau FGM. Ce sont des matériaux composites aux propriétés macroscopiquement hétérogènes**.**

I.4. Fabrication des FGMs

Les matériaux fonctionnellement gradués (FGM) sont des matériaux qui présentent une variation progressive de leurs propriétés physiques et chimiques le long de leur structure, ce qui leur confère des performances améliorées dans des applications spécifiques. La fabrication de matériaux FGM peut être réalisée en utilisant différentes méthodes, notamment:

1. **Fabrication par empilement** : consiste à empiler des couches de différents matériaux avec des propriétés différentes pour former une structure graduée. Chaque couche est déposée individuellement, et la composition ou les propriétés du matériau Cette méthode sont modifiées entre chaque couche pour obtenir la gradation souhaitée. Des techniques telles que l'évaporation sous vide, le dépôt chimique en phase vapeur (CVD) ou le dépôt physique en phase vapeur (PVD) peuvent être utilisées pour cette méthode.
2. **Fabrication par frittage**: Cette méthode implique le frittage de poudres de matériaux différents à des températures élevées. Les poudres sont mélangées dans des

proportions spécifiques, formant ainsi une composition graduelle. Lors du frittage, les poudres se lient entre elles, créant une structure solide graduée.

3. **Fabrication par traitement thermique**: Dans cette méthode, un matériau initial est chauffé à une température spécifique, puis refroidi rapidement de manière contrôlée. Ce processus de chauffage et de refroidissement répété peut provoquer des changements dans la composition chimique et la microstructure du matériau, conduisant à une gradation des propriétés.

4. **Fabrication par impression 3D**: L'impression 3D permet de fabriquer des matériaux FGM en déposant successivement des couches de différents matériaux, chacune avec des propriétés différentes. Les imprimantes 3D capables de traiter plusieurs matériaux ou de mélanger des matériaux au niveau de la buse peuvent être utilisées pour créer des structures graduelles.

Il est important de noter que la fabrication de matériaux FGM est un domaine de recherche en constante évolution, et de nouvelles méthodes peuvent être développées à l'avenir. La sélection de la méthode dépendra des matériaux spécifiques que vous souhaitez utiliser, ainsi que des propriétés et des performances requises pour l'application visée.

I.5. Domaine d'application des FGMs

Les matériaux composites trouvent leurs principales applications dans:

- **Secteur d'automobile**

Le secteur de l'automobile utilise des composites à matrice polyesters et fibres de verre, maisil devrait intégrer massivement les composites thermoplastiques.
Les composites apportent au secteur de l'automobile une facilité d'entretien et une grandeliberté de conception.
Dans l'automobile, le développement à long terme des composites est menacé par la difficultéde les intégrer dans les chaînes de fabrication et par les exigences de recyclage.

- **Secteur ferroviaire**

Le secteur ferroviaire utilise principalement des composites à matrice thermodurcissable etfibres longues, mais il apparaît peu dynamique.
Dans le secteur ferroviaire, la facilité de conception et le bon comportement au feu sont les principaux atouts des matériaux composites.

La généralisation des composites dans le ferroviaire est handicapée par leur coût élevé par rapport à les solutions en acier et par les difficultés de l'approche fonctionnelle rencontrées par les concepteurs.

- **Construction industrielle**

L'utilisation des matériaux composites peut contribuer à améliorer la sécurité de certains sites industriels sensibles et faciliter la conception des bâtiments.

Pour la construction industrielle standard, les matériaux composites ont un prix encore trop élevé et leur caractérisation en milieu corrosif est insuffisamment connue.

- **Secteur médical**

Les applications des composites au secteur médical et de la sécurité sont très récentes et concernent plutôt les composites hautes performances, à matrice époxy et fibres de carbone, ou à matrice thermoplastique et fibres longues de verre ou de carbone d'autre part.

L'utilisation des composites permet d'augmenter la fiabilité et la précision des instruments grâce à une meilleure résistance aux chocs, une grande rigidité et une bonne résistance à la corrosion (prothèses, brancards).

- **Construction électrique**

Le secteur de la construction électrique et électronique utilise massivement des composites « grande diffusion », essentiellement sous forme de semi-produits SMC comprimés.
En utilisant les propriétés remarquables des matériaux composites, la construction électrique réalise des équipements fiables, aux fonctions multiples et longues durée de vie.
Les cadences de production des composants électriques, pouvant atteindre plusieurs milliers par jour, sont peu compatibles avec celles du procédé de compression SMC. Des exigences croissantes en recyclabilité des produits constituent une menace importante pour ce secteur d'application des composites.

- **Les équipements de sports et loisirs**

Les sports et loisirs utilisent des composites HP avec un taux de renforts de plus de 70%. Les composites permettent d'augmenter sur mesure les performances, la fiabilité des articles de sport. La résistance mécanique et élastique des composites TP reste encore trop faible comparée à celle des alliages légers, en particulier pour les composites à matrice en polypropylène et en polyamide.

Application des FGM dans le domaine du Génie civil:

On peut citer les applications suivantes:

1. Les joints dans la charpente métallique: Lors de l'assemblage des éléments en charpente métallique, on est obligé de réaliser des soudures entre deux éléments de nature/nuance différente l'un lourd et l'autre souple (acier/aluminium). Dans ce cas on utilise des joints ordinaires en acier. L'inconvénient de ce type de joint est la rupture et la durabilité. L'utilisation des joints FGM est optimale.

2. Les grands vitrages dans les zones chaudes: L'utilisation des vitres en FGM a pour but de contrôler la température dans les zones chaudes, éviter les vitrages multiples et réduire le cout, et le poids des structures.

3. Les chausses rigides : Les FGMs peuvent être utilisés dans les chaussées rigides en béton avec une gradation obtenue par la variation de la fraction volumique de fibres, cette technique est visée d'être utilisée dans les autoroutes et les routes à très fort trafic, les pistes des aéroports, car elles offrent une résistance et une durabilité élevées, le but est d'optimiser l'épaisseur de la chaussée afin d'avoir un matériau rigide sur la surface de roulement et un matériau moins rigide sur la couche de fondation.

4. Les chaussées souples : Les FGM peuvent être utilisé dans les chaussées souples pour supprimer les couches d'accrochage entre la couche de Grave Bitume et la couche de roulement en Béton Bitumineux pour éviter le glissement entre les deux couches et économiser les épaisseurs tout en obtenant un comportement optimisé, augmentant la capacité portante de la chaussée et par la suite sa durabilité.

5. Les tunnels (functionally graded concrete segment in tunnel): Les parois intérieures des tunnels doivent être réalisées en matériau réfractaire et rigide dans la surface exposée et d'un matériau imperméable dans la surface en contact avec le sol et les roches.

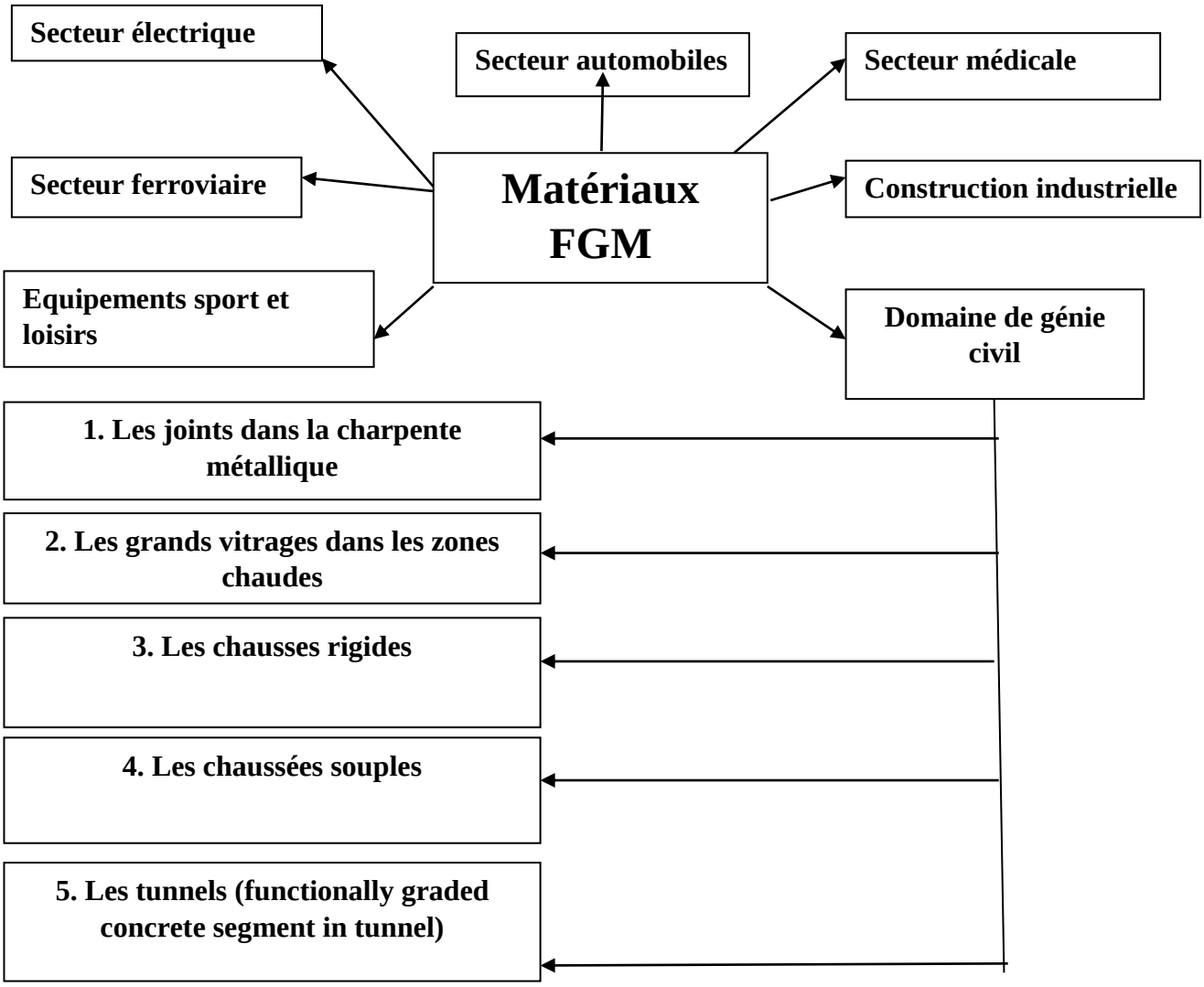

Figure I.1: Les principaux domaines d'application des FGM

I.6 Méthodes d'Homogénéisation des FGMs

Les matériaux à gradients de propriétés sont interprétés comme des matériaux hétérogènes en raison de leur micro- et/ou macrostructures. Premièrement, nous introduirons différents modèles d'homogénéisation qui peuvent prédire le comportement équivalent des matériaux avec des gradients de propriétés et déterminer leurs propriétés physiques effectives. Afin d'analyser la structure dans le FGM comme une structure homogène à l'échelle macroscopique.

D'une façon générale, les méthodes d'homogénéisation pour traiter les matériaux non homogènes se définissent par deux techniques:

a) Techniques d'homogénéisation analytiques,
b) Techniques d'homogénéisation numériques.

Pour la première catégorie, il s'agit de déterminer les propriétés matérielles des matériaux FGM à l'aide de modèles mathématiques permettant d'exprimer les propriétés physiques des différentes phases qui composent le matériau hétérogène.

Les modèles analytiques sont basés sur la sélection de volumes de base représentatifs pour prédire correctement les propriétés physiques effectives. Les modèles numériques décrivent le comportement de ces matériaux en basant sur la simulation micromécanique. En effet, ces modèles considèrent la forme géométrique, les propriétés matériels et le nombre des phases constituant le matériau hétérogène. Pour une étude approfondie, on pourra se référer aux ouvrages de [**Bary et al. 2009**].

Une présentation détaillée a été faite par **[Akbarzadeh et al. 2015**] pour examiner l'influence des modèles micromécaniques sur la réponse des plaques en FGMs. Parmi les modèles d'homogénéisation dans la littérature, quelques modèles micromécaniques standards pourraient être mentionnées.

1) Loi exponentielle.
2) Loi de puissances.
3) La distribution sigmoïde.
4) **I.6.1 Loi exponentielle E-FGMs :**

Dans cette méthode, la fraction volumique est donnée sous forme d'une fonction exponentielle à travers l'épaisseur Où *E0* présente le module d'Young de la face homogène de la plaque, et « k » c'est l'indice de la variation matérielle à travers

l'épaisseur de la plaque. Cette méthode est utilisée généralement pour les plaques épaisses ou avec forte épaisseur **[Akbarzadeh et al.2015].**

$$E(z) = E_0 e^{k(z/h+1/2)} \tag{I.1}$$

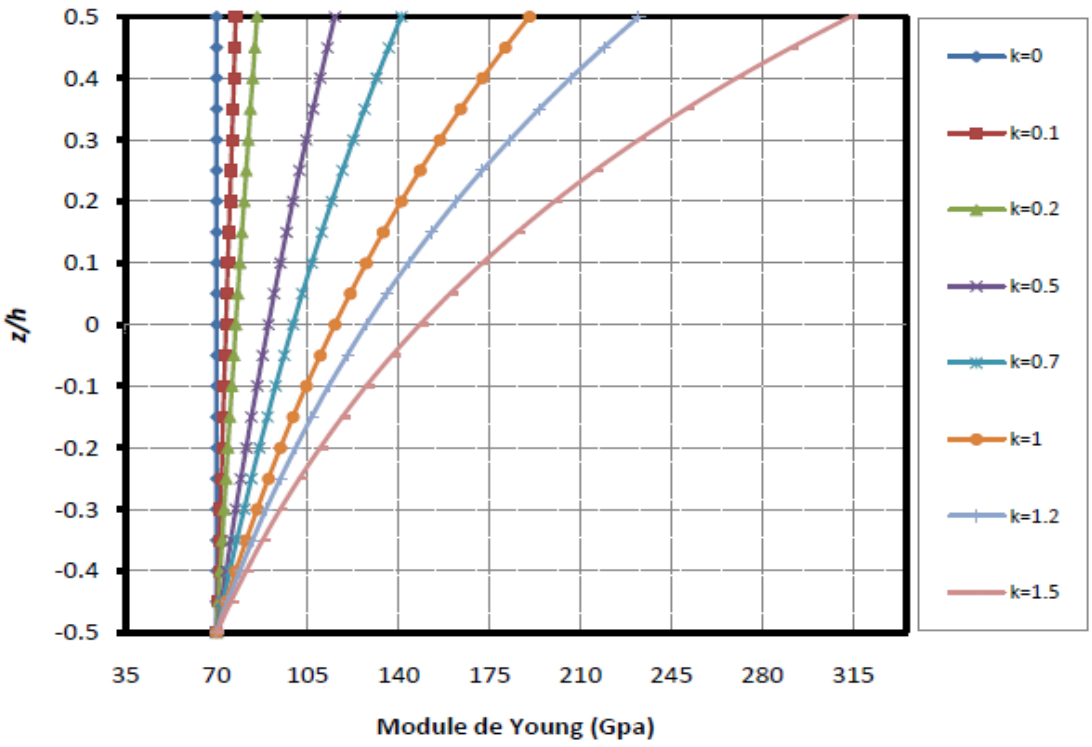

Figure I.2 : distribution de module de Young à travers l'épaisseur de E-FGMs

1.6.2 Loi de puissances P-FGMs

La loi des puissances est souvent introduite par plusieurs chercheurs pour évaluer le module d'Young, dans les cas statiques ou dynamiques, elle est utilisée pour estimer le module d'Young des plaques minces, modérément épaisses et épaisses **[Reddy et al.2000]**

$$E(z) = E_m + (E_c - E_m)(z/h+1/2)^k \tag{I.2}$$

Où k est un paramètre matériel, les indices m et c sont les modules élastiques de la face intérieure « métal » et la face supérieure « céramique » respectivement, Il apparait clairement que la fraction volumique change rapidement près de surface inférieure pour k <1, et augmenté rapidement près de la surface supérieure pour k >1.

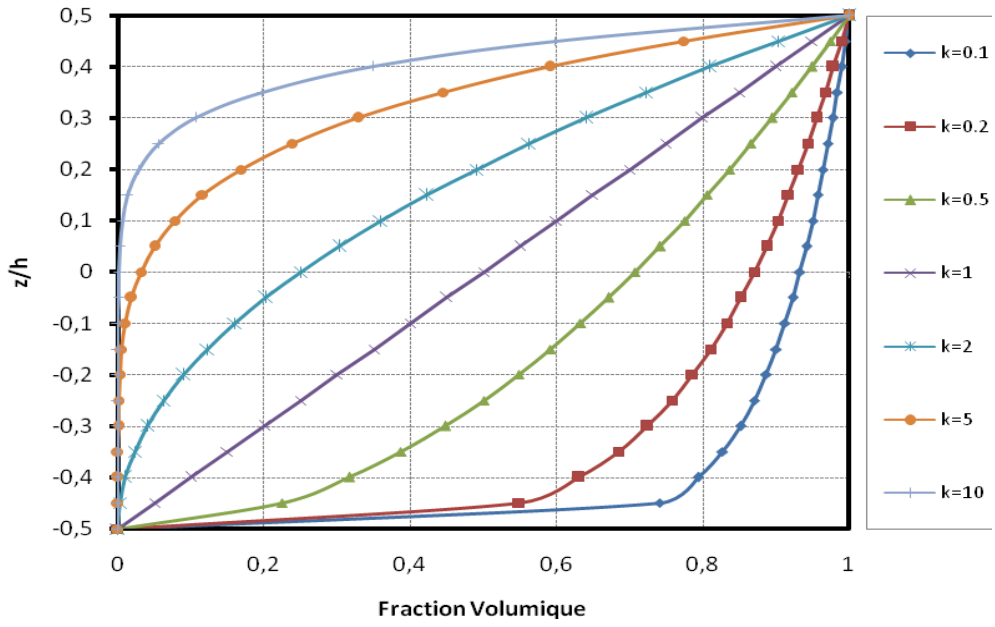

Figure I.3: Variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM.

I.6.3 Loi de distribution sigmoïde

La troisième fonction utilisée dans cette étude est la fonction sigmoïde (S-FGM), **[Bao et wang 1995].**

$$p_e = p_m + 1/2(p_m - p_c)(1+2z/h)^k(-h/2 \le z \le 0)$$
$$p_e = p_m + 1/2(p_m - p_c)(1-2z/h)^k(0 \le z \le h/2) \quad \textbf{(I.3)}$$

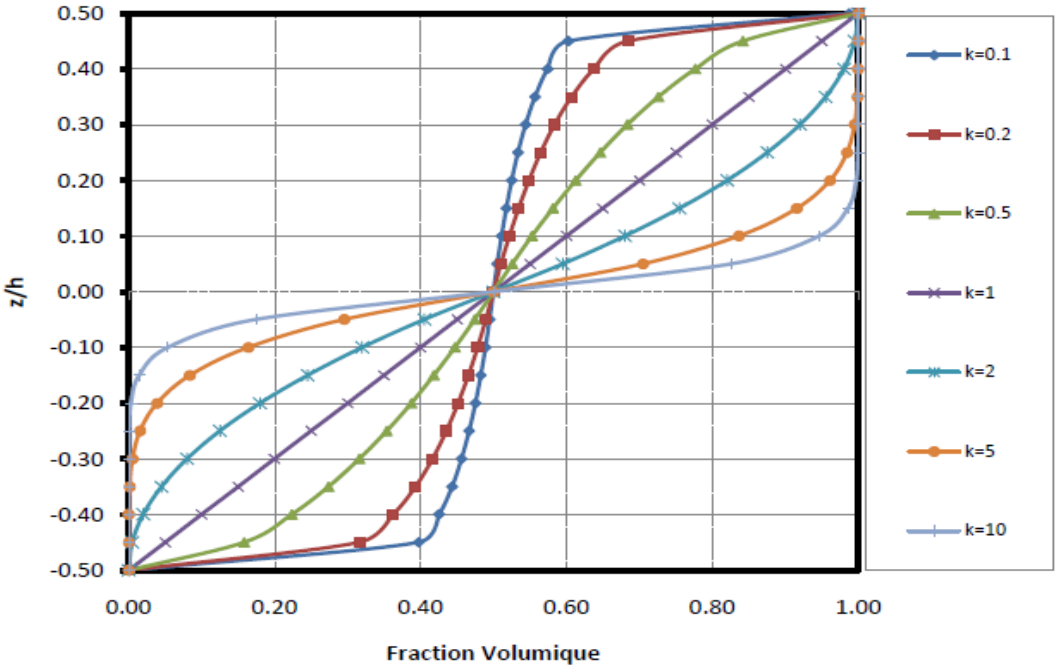

Figure I.4 : Variation de la fraction volumique dans une plaque. S-FGM

I.7 Conclusion

Après avoir défini les matériaux FGM comme des matériaux composites innovants dont la composition et la structure varient progressivement avec le volume, nous avons exposé différentes lois régissant l'évolution des propriétés de ces derniers matériaux. Nous avons également mentionné certains de leurs procédés de fabrication et leurs domaines d'application. Les modifications spatiales et incrémentales des propriétés de ces matériaux permettent de créer des structures innovantes utilisables dans de nombreux domaines d'application des structures spéciales pour le génie civil.

CHAPITRE II
THEORIES DES POUTRES

Chapitre II

Théories des poutres

II.1. Introduction

II.2. La théories classique des poutres (Euler- Bernoulli)

II.3. la théorie de déformation en cisaillement de premier ordre de (TIMOSHENKO)

II.4. la théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (REDDY)

II.5.Conclusion

II.1 Introduction

Les structures complexes que l'on étudie couramment sont constituées de sous-ensembles aux géométries les plus diverses: barres ou poutres, plaques et coques minces ou épaisses, parties massives. Les structures minces de type poutre, arc, plaque et coque sont très répandues dans le milieu naturel (feuilles d'arbres, mollusques, cellules vivantes, etc.) et dans les réalisations humaines les plus diverses (charpentes, voûtes, réservoirs, caissons, tabliers de ponts, carrosseries automobiles, coques de bateaux, ailes d'avions, etc.).

Pour chacun de ces constituants, on dispose de la formulation de la théorie de l'élasticité ou plasticité ou de modèles théoriques qui en sont dérivés (théorie des poutres, plaques et coques). L'analyse du comportement et la conception de ces structures sont des activités importantes sur les plans techniques et économiques.

La théorie des poutres est une branche importante de la mécanique des structures qui étudie le comportement et la réponse des poutres aux charges appliquées. Les poutres sont généralement des éléments structurels longs, minces et linéaires dont la fonction principale est de supporter des charges en les transférant sur des supports à leurs extrémités. Largement utilisé dans la construction de divers types de structures telles que ponts, bâtiments, échafaudages, passerelles et autres structures.

L'étude de la théorie des poutres remonte à l'Antiquité, lorsque des ingénieurs et des universitaires comme Archimède ont développé des concepts de base pour comprendre le comportement des poutres. Cependant, ce n'est que des siècles plus tard que les mathématiciens et les ingénieurs ont pu formaliser et approfondir la théorie des poutres en utilisant les principes de la mécanique classique.

La théorie des poutres repose sur des hypothèses simplifiées qui facilitent l'analyse et la modélisation du comportement structurel. Ces hypothèses incluent que la poutre est unidimensionnelle et linéairement élastique et que la déformation transversale est négligeable par rapport à la déformation axiale.

Le comportement des poutres est décrit en termes de charges appliquées, de déformations, de contraintes internes, de moments de flexion, d'efforts tranchants et de déplacements résultants. Ces paramètres sont étroitement liés à la géométrie de la poutre et aux propriétés des matériaux.

La théorie des poutres a parcouru un long chemin grâce aux progrès des mathématiques, de la physique et de l'ingénierie. Assurer la stabilité, la résistance et la sécurité des structures de poutres est aujourd'hui d'une grande importance dans la conception, l'analyse et le dimensionnement des structures de poutres.

De plus, les progrès de la technologie et de l'informatique ont permis de résoudre des problèmes de plus en plus complexes, en tenant compte de facteurs tels que les charges dynamiques, les matériaux non linéaires et des conditions aux limites plus réalistes. La théorie des poutres est donc toujours un domaine de recherche actif et un outil précieux pour les ingénieurs et les scientifiques dans la conception et l'analyse des structures modernes.
Les théories des poutres les plus connues dans la littérature sont :

- La théorie d'Euler-Bernoulli, qui néglige l'influence du cisaillement ;
- La théorie de Timoshenko qui prend en compte l'effet du cisaillement, utiliseun facteur de correction (théorie du premier ordre).
- La théorie d'ordre élevé qui prend en compte l'effet du cisaillement.

II.2 La théorie classique des poutres (EULER- BERNOULLI)

La théorie classique des poutres, également connue sous le nom de théorie d'Euler-Bernoulli, est l'une des approches fondamentales de l'analyse du comportement des poutres. Il porte le nom du mathématicien suisse Leonhard Euler et du physicien et mathématicien suisse Daniel Bernoulli, qui ont apporté d'importantes contributions au domaine au 18e siècle.
Cette théorie est basée sur des hypothèses simplificatrices et s'applique à des poutres relativement minces et longues où la déflexion latérale est considérée comme négligeable par rapport à la déflexion axiale.
Les principales hypothèses de la théorie d'Euler-Bernoulli sont :
- Hypothèse de petite déformation : La déformation latérale est si faible que la forme originale de la poutre est à peine modifiée.
- Hypothèse de l'axe neutre : Avant déformation, chaque section transversale de la poutre reste plane après déformation, ce qui entraîne une déformation autour de l'axe neutre.
- **Hypothèse de section plane :** Une section plane perpendiculaire à l'axe de la poutre reste plane sans subir de déformation par cisaillement après déformation.
- Matériau élastique linéaire : Le matériau de la poutre obéit à la loi de Hooke et présente un comportement élastique linéaire. Cela signifie que la contrainte est proportionnelle à la déformation.
Sous ces hypothèses, la théorie d'Euler-Bernoulli nous permet de décrire le comportement de la poutre en réponse aux charges appliquées et aux moments de flexion résultants. Il fournit des équations différentielles qui peuvent déterminer la déformation, la contrainte interne et le déplacement sur la longueur de la poutre.
Les grandeurs les plus importantes analysées dans la théorie d'Euler-Bernoulli sont la déformation,

la contrainte normale, le moment de flexion et le déplacement. Ces informations sont essentielles pour une conception efficace et sûre des poutres dans des applications telles que les ponts, les bâtiments et les poutres de support.

Cependant, il est important de noter que la théorie d'Euler-Bernoulli a certaines limites. Convient aux poutres étroites et longues, mais peut ne pas s'appliquer aux poutres courtes et épaisses ou aux matériaux non linéaires. Dans de tels cas, d'autres théories plus avancées telles que la théorie de Timochenko ou la théorie de la flexion de Saint-Venin peuvent être utilisées pour une analyse plus détaillée.

En se basant sur les hypothèses ci-dessus, le champ de déplacement est donné par :

$$U(x,y) = u_0 - z.\frac{dw}{dx} \qquad (II.1)$$
$$W(x) = w_0(x)$$

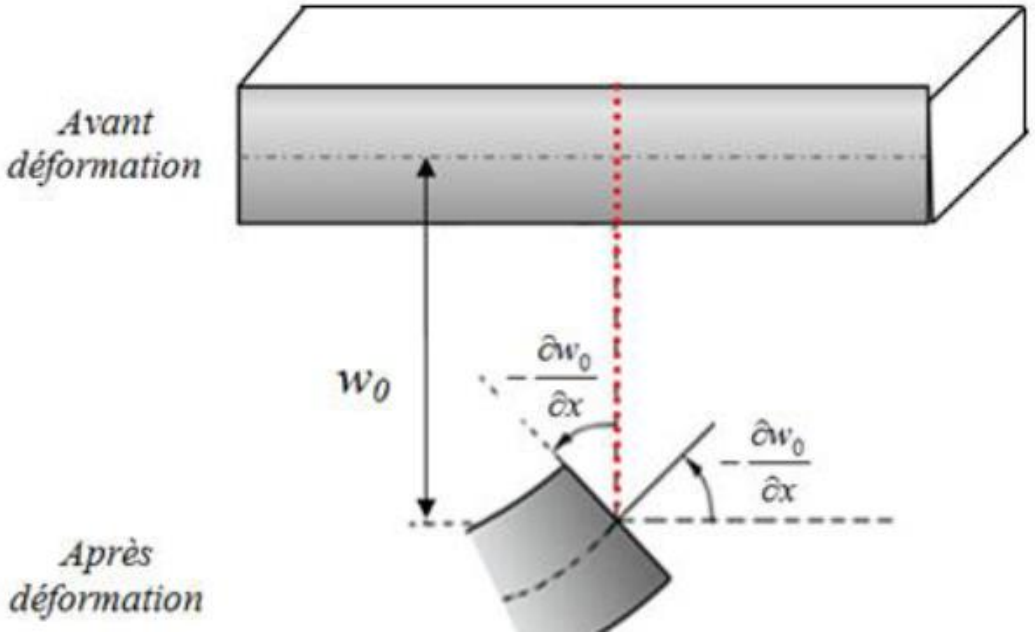

Figure II.1 : Schéma de principe de la théorie classique des poutres

La rotation due à la flexion est : $\partial w / dx$

Sous ces hypothèses, les sections droites de la poutre ne subissent aucun glissement, en effet :

$$\gamma = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{dx} = 0 \qquad \text{(II.2)}$$

Donc il en résulte que le cisaillement est négligeable par les hypothèses de cette théorie. Puisque ce modèle ne tient pas en compte l'effet de cisaillement transverse, il donne des résultats imprécis pour les poutres courtes.

Problème de cette théorie : La négligence de la déformation transversale, ne peut plus résoudre les différents problèmes comme la vibration des poutres ou le flambage même aussi la flèche.

II.3 la théorie de déformation en cisaillement de premier ordre (TIMOSHENKO)

La théorie des déformations de cisaillement du premier ordre, souvent appelée théorie de Timochenko, est une amélioration de la théorie classique d'Euler-Bernoulli pour l'analyse du comportement des poutres. Elle a été développée au début du XXe siècle par le célèbre ingénieur soviétique Stephen Timochenko.

Contrairement à la théorie d'Euler-Bernoulli, la théorie de Timochenko prend en compte les effets du cisaillement de la poutre et de la déformation transversale. Par conséquent, elle convient à l'analyse de poutres relativement courtes et épaisses et/ou de poutres soumises à des charges de cisaillement élevées.

Hypothèses pour la déformation par cisaillement : La théorie de Timochenko décrit la déformation par cisaillement de la section transversale de la poutre et nous permet de considérer les effets du cisaillement sur la rigidité et le comportement de la poutre.

-Effets de la rotation: Contrairement à la théorie d'Euler-Bernoulli, la théorie de Timochenko prend également en compte l'effet de la rotation de la poutre sur la déformation du faisceau.

-Variations du moment de flexion : La théorie de Timochenko prend en compte la variation du moment de flexion dans la section transversale de la poutre, ce qui rend la théorie plus précise lorsque la charge est appliquée non seulement dans le plan de la poutre, mais également dans la direction verticale. En incorporant ces améliorations, la théorie de Timoshenko fournit des équations de déformation et de contrainte plus précises pour les poutres soumises à des charges de cisaillement importantes et les poutres avec de grands rapports d'élancement. La théorie de Timochenko est particulièrement utile en ingénierie, où les poutres épaisses et les structures courtes sont courantes.

Poutres de pont de bâtiment industriel, poutres de grue, rails, poutres de support, etc…

Pour obtenir des résultats d'analyse précis et fiables, il est important de sélectionner la théorie appropriée en fonction des propriétés de la poutre et des conditions d'application. La théorie de Timochenko est donc un outil important pour les ingénieurs et les scientifiques dans la conception et l'analyse de structures complexes et diverses.

Les études sur la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) s'applique pour le cas des poutres courtes, elle est basée sur le principe; qu'après déformation, la section plane reste plane mais elle perd sa perpendicularité par rapport à la ligne moyenne de la poutre (figure II.2).

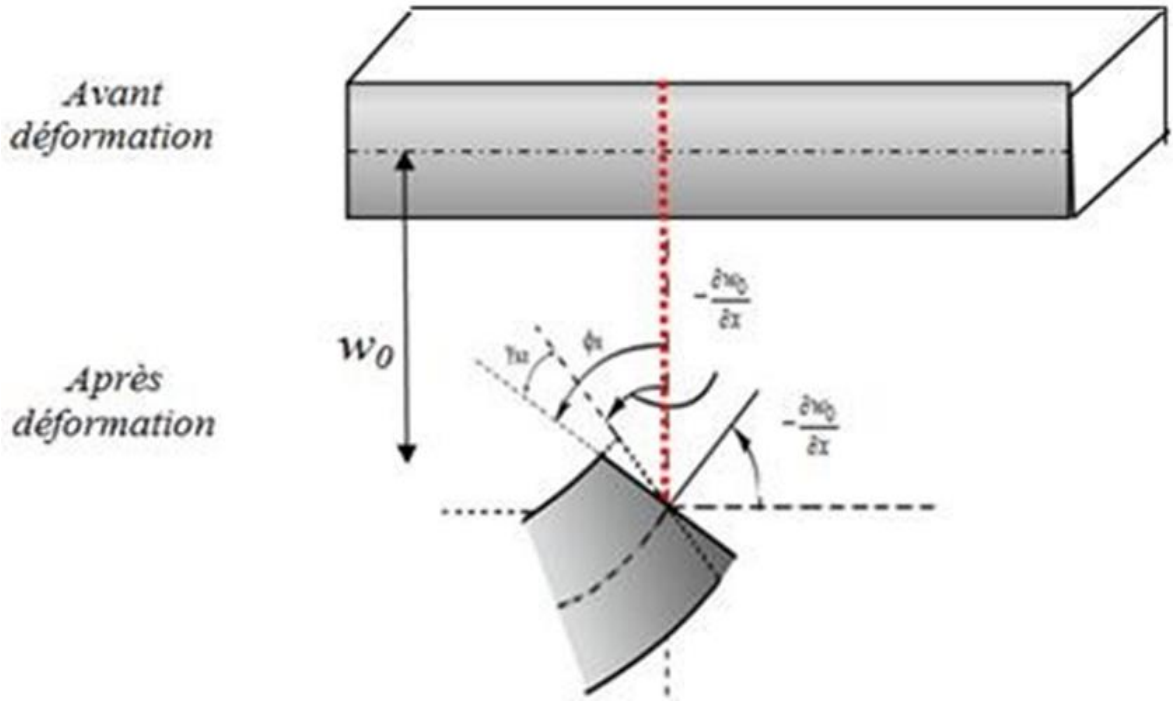

Figure II.2 : Schéma de principe de la théorie des poutres de Timoshenko (FSDT)

Dans ce cas, la fonction $f(z)$ est égale à z. Il existe un cisaillement uniforme et les déformations dues au cisaillement transversal ne sont pas négligées. C'est la théorie depremier ordre. La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (théorie de Timoshenko) a prolongé la théorie classique des poutres en tenant compte de l'effet de cisaillement transverse, et cela à travers ces hypothèses. L'hypothèse de base porte sur une schématisation du champ de déplacement à l'intérieur du solide (hypothèse "cinématique") : le solide est assimilé à un milieu curviligne, le champ de déplacement du milieu continu étant ensuite évalué à partir de la solution trouvée en supposant qu'une section droite initialement plane et perpendiculaire à la "ligne moyenne" ainsi définie reste plane mais non perpendiculaire. En un point quelconque du milieu curviligne. Le champ de déplacement pour un point M(x, z) quelconque s'exprime en fonction de ces inconnues :

$$U(x,z) = u_0(x) + z.\frac{\partial w}{dx} - z.\varphi_y(x) \qquad \text{(II.3)}$$
$$W(x,z) = w_0(x)$$

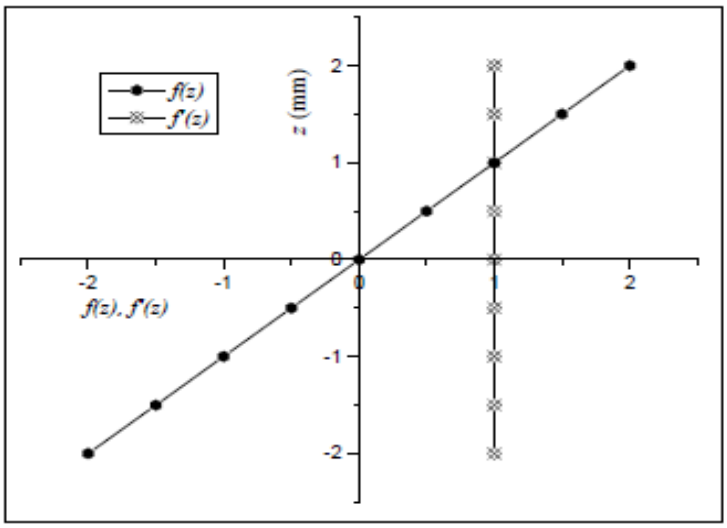

Figure II. 3: Variation de la fonction de gauchissement f(z) = z et f '(z) suivant l'épaisseur

Où

φ_y : Etant la rotation totale de la section mesurée sur la ligne moyenne de la poutre.

Si on veut calculer la contrainte de cisaillement :

$$\gamma = \frac{\partial u}{dz} + \frac{\partial w}{dx} = \varphi_y \qquad \text{(II.4)}$$
$$\tau = \gamma.G$$

Avec G : le module de cisaillement transverse.

Donc, cette théorie a corrigé le défaut de la théorie classique qui ne tient pas compte du cisaillement transverse, mais au même temps ces contraintes sont constantes à travers l'épaisseur, ce qui n'est pas la réalité. Pour cela, les chercheurs ont trouvé des coefficients correcteurs notés "k" pour régler ce problème. Ces coefficients dépendent de la forme géométrique de la poutre considérée (par exemple, pour une poutre de section rectangulaire k=5/6).

Les contraintes de cisaillement et les déformations sont uniformes et constantes à travers l'épaisseur (Figures II.4).

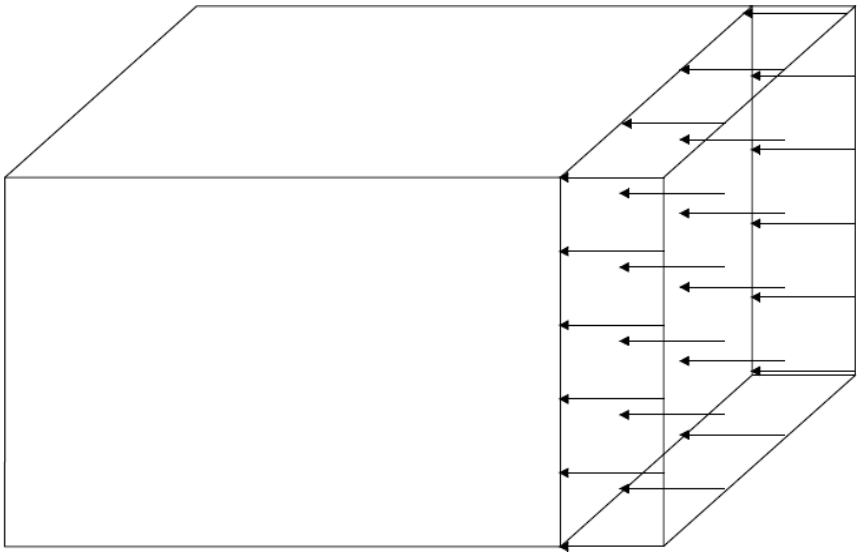

Figure II.4 Distribution (constante) des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur selon la théorie de Timoshenko.

Les facteurs de correction sont calculés par comparaison entre l'énergie de cisaillement transverse du 1er ordre et celle d'ordre supérieur; Ces contraintes sont déduites des équations d'équilibre.

D'ailleurs pour éviter l'introduction d'un facteur de correction, des théories de déformation en cisaillement d'ordre élevé ont été développées.

- **Avantage de cette théorie :** Cette théorie est plus améliorée que la théorie classique parce qu'elle a pris une fonction supplémentaire et ne néglige plus le cisaillement transversal.
- **Problème de cette théorie :** Aux bords extrêmes de la poutre, elle prédit des contraintes des cisaillements. L'introduction de coefficients de correction peut ramener des erreurs dans les solutions analytiques pour cela les chercheurs essayent de passer à une autre théorie.

II.4 la théorie de déformation en cisaillement en d'ordre élevé (REDDY)

La théorie des déformations de cisaillement d'ordre supérieur, également appelée théorie de Reddy, est une approche avancée pour analyser le comportement des poutres. Cette théorie a été avancée par J.N. dans les années 1980. Reddy est un ingénieur et scientifique renommé dans le domaine de la mécanique des structures. La théorie de Reddy étend la théorie de Timochenko, en tenant compte non seulement des effets du cisaillement et de la déformation transversale, mais également des effets de la flexion d'ordre supérieur. Par conséquent, il convient à l'analyse de poutres aux géométries complexes et aux structures soumises à des charges importantes dans trois directions spatiales. Les principales caractéristiques et améliorations de la théorie de Reddy par rapport à celle de Timochenko sont :

-Modélisation géométrique : La théorie de Reddy utilise une fonction de déformation plus complexe pour modéliser la forme de la poutre, permettant des représentations plus précises de formes plus complexes.

-Quelques inconnues : Contrairement aux théories précédentes qui supposaient qu'un seul déplacement latéral était inconnu, la théorie de Reddy considérait plusieurs inconnues de déplacement latéral, améliorant la précision de l'analyse.

-Ordres de contrainte plus élevés : La théorie de Reddy prend en compte les déformations de flexion d'ordre supérieur (par exemple, les déformations de 3^{eme} ordre), ce qui se traduit par une plus grande précision pour les poutres soumises à de fortes charges dans plusieurs directions.

En incorporant ces améliorations, la théorie de Reddy fournit des solutions plus précises et détaillées aux déformations des poutres, aux contraintes internes, aux moments de flexion et aux forces de cisaillement. La théorie de Reddy est particulièrement utile pour analyser des structures complexes telles que des poutres courbes, des poutres de sections variables et des poutres soumises à des charges tridimensionnelles. Ils sont également utilisés dans des domaines où une plus grande précision est requise, tels que l'aérospatiale, la construction navale et les structures composites avancées. Cependant, il est important de noter que l'utilisation de la théorie de Reddy peut être plus complexe et intensive en calcul par rapport aux théories simplifiées telles que la théorie de Timochenko ou la théorie d'Euler-Bernoulli. Par conséquent, son utilisation n'est généralement utilisée que lorsqu'une modélisation plus détaillée est requise pour des résultats plus précis.

À la différence de la théorie classique et la théorie de Timoshenko avec les acceptations de la distribution linéaire du déplacement par l'épaisseur, la théorie d'ordre élevé est basée surune distribution non linéaire des champs dans l'épaisseur. Par conséquent, on tient compte des effets de la déformation transversale de cisaillement et/ou de la déformation normale transversale. Ces modèles n'exigent pas des facteurs de correction. Elle est plus précise que la théorie du premier ordre

puisqu'elle introduit une fonction qui tient compte du phénomènede "gauchissement". Par définition ; le gauchissement apparaît lorsque la section transversale de la poutre perd sa planéité (figure II.5). La fonction $f(z)$ représente le gauchissement et sa dérivée $f'(z)$ le cisaillement.

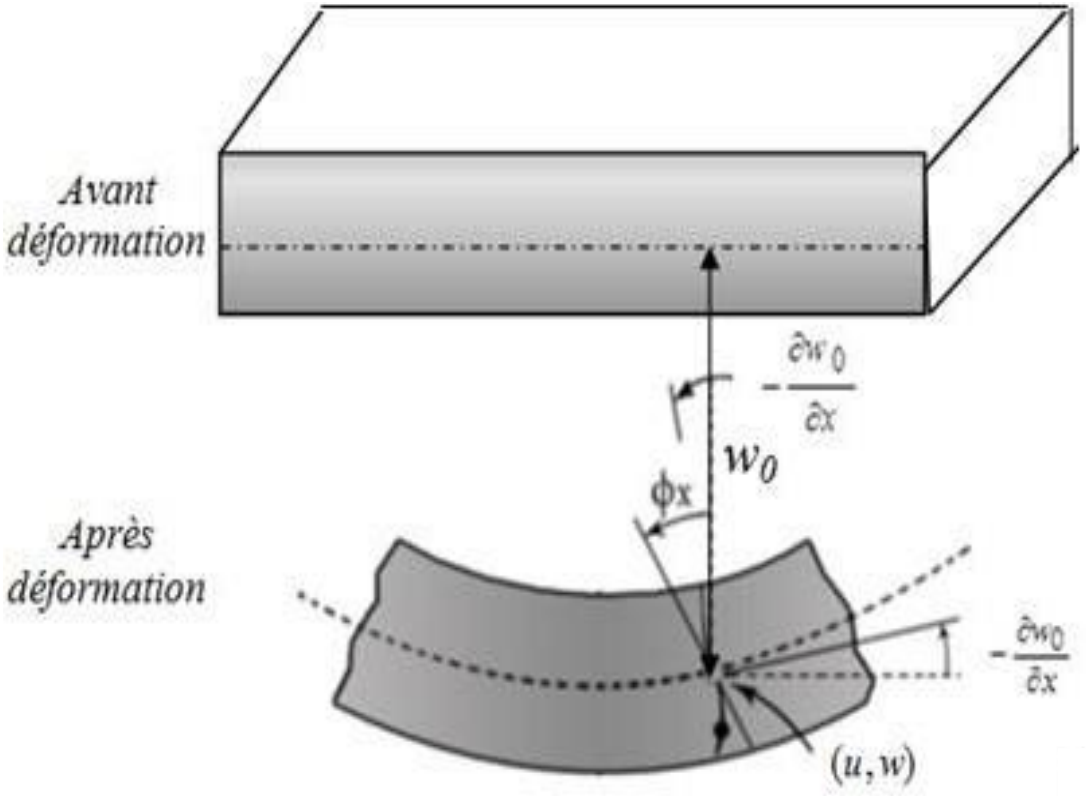

Figure II.5 Illustration de la poutre d'ordre élevé.

Le champ de déplacement est généralement écrit comme suite:

$$u(x,z) = u_0(x) - z.\frac{\partial w_0(x)}{\partial x} + f(z)\varphi_y(x) \qquad (II.5)$$
$$w(x,z) = w_0(x)$$

Avec : (u_0 , w_0) et (φ_y) sont les déplacements en membrane et la rotation autour de l'axe y,

respectivement, f (z) est une fonction de cisaillement transverse caractérisant les théories correspondantes. En effet, les déplacements de la théorie classique de poutre (CBT) sont obtenus en prenant $f(z) = 0$, alors que la théorie de premier ordre (FSDT) peut être obtenue par $f(z) = z$.

Pour que les contraintes tangentielles soient nulles sur les bords extrêmes de la poutre,On doit

(II.6)

avoir:

$$f^{'}(z)\left|z=\pm\frac{h}{2}=0\right.$$

C'est la condition qui nous permet d'avoir une répartition parabolique des contraintes de cisaillement sur l'épaisseur de la poutre.

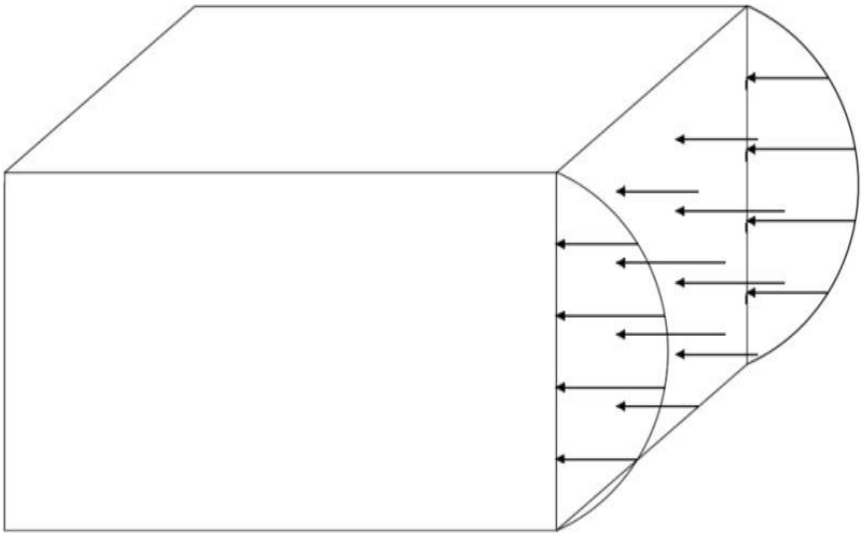

Figure II.6 la distribution (variable) des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur dans la théorie d'ordre élevé

En présente ci-dessous quelques fonctions de gauchissement :

-L'approche d'Ambartsumyan 1969 avec :

$$f(z)=\frac{z}{2}(\frac{h^2}{4}-\frac{z^2}{3}) \tag{II.7}$$

-L'approche de Reissner 1945 avec :

$$f(z)=\frac{5}{4}.z(1-\frac{4z^2}{3h^2}) \tag{II.8}$$

-L'approche de Reddy 1997 avec :

$$f(z)=\frac{5}{4}.z(1-\frac{4z^2}{3h^2}) \tag{II.9}$$

Dans le modèle de (Reddy, 1997), le champ de déplacement membranaire est cubique et le déplacement normal w est constant. Ce modèle donne une bonne approximation pour les contraintes de cisaillement transverse par rapport à la solution élastique tridimensionnelle.
La distribution des contraintes de cisaillement transversal est parabolique suivant l'épaisseur. Les conditions aux limites sur les surfaces libres sont satisfaites.

-L'approche de (Touratier, 1991) avec :

$$f(z)=\frac{h}{\pi}\sin(\frac{z}{h}) \tag{II.10}$$

Touratier propose le modèle "sinus" qui est différent des autres modèles d'ordre supérieur puisqu'il n'utilise pas de fonction polynomiale. Une fonction trigonométrique sinusoïdale est donc introduite pour modéliser la répartition des contraintes de cisaillement suivant l'épaisseur. La fonction de cisaillement transverse s'écrit comme suit

$$f(z)=\frac{h}{\pi}\sin(\frac{z}{h})=\frac{h}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(\frac{\pi z}{h})^{2n+1}=z\left(1-\frac{\pi^2}{3!}.\frac{z^2}{h^2}+\frac{\pi^2}{5!}.\frac{z^4}{h^4}-\frac{\pi^6}{7!}.\frac{z^6}{h^6}\right) \tag{II.11}$$

La fonction de cisaillement transverse est de la forme suivante :

$$f(z)=ze^{-2(z/h)^2} \tag{II.12}$$

Le choix de la fonction exponentielle permet un développement en puissance pair et impair de la variable z alors que la fonction "sinus" (Touratier) ne permet qu'un développement en puissances impaires.

-L'approche de (Aydogdu, 2005) avec ;

$$f(z) = z\alpha^{\frac{-2(z/h)^2}{\ln(\alpha)}} \qquad \text{(II.13)}$$

Le choix de la fonction exponentielle permet un développement en puissance pair et impair de la variable *z* alors que la fonction "sinus" de Touratier ne permet qu'un développement en puissance impair.

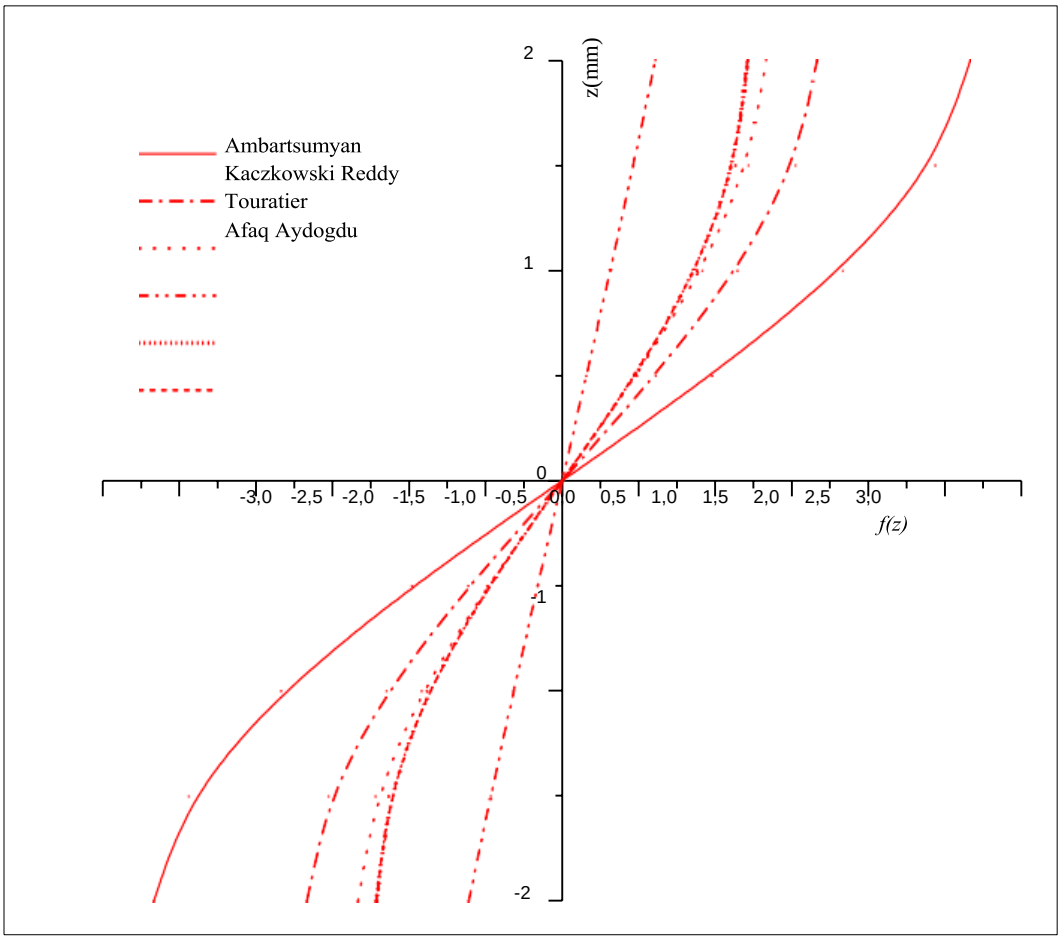

Figure II.7: Variation de la fonction de forme f(z) des différents modèles en fonction del'épaisseur

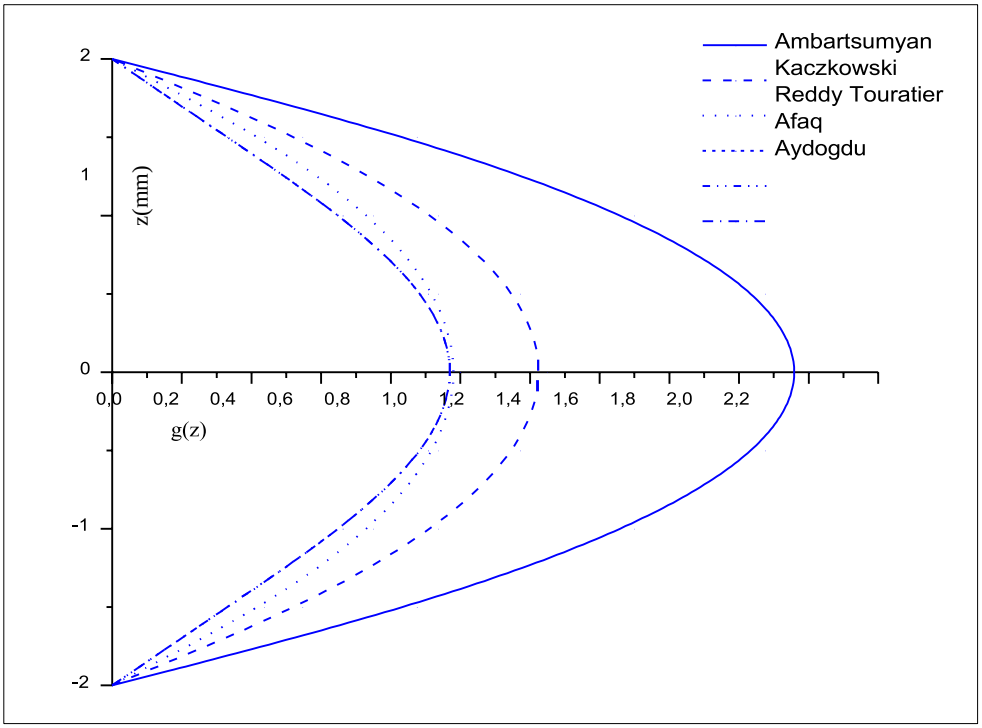

Figure II.8: Variation de la dérivée de la fonction de forme f'(z) des différents modèles suivant l'épaisseur.

La figure ci-dessus (II-8), illustre la variation de la fonction de gauchissement *f(z)* des différents modèles en fonction de l'épaisseur de la poutre. Cette fonction est symétrique par rapport au plan moyen de la poutre. On remarque que les deux approches d'Ambartsumyan et de Kaczkowski sont un peu loin des autres fonctions de forme ; elles ont servies comme éléments de base pour développer les autres fonctions qui sont plus proches de l'analyse 3D. Pour la (figure II-7), on remarque aussi la divergence des deux approches d'Ambartsumyan et de Kaczkowski par rapport aux autres approches. Dans ce cas, à l'aide des fonctions de gauchissement les contraintes de cisaillement de la HSDT sont paraboliques à travers l'épaisseur comme est montrer dans la figure ci-dessous (Figure II.9)

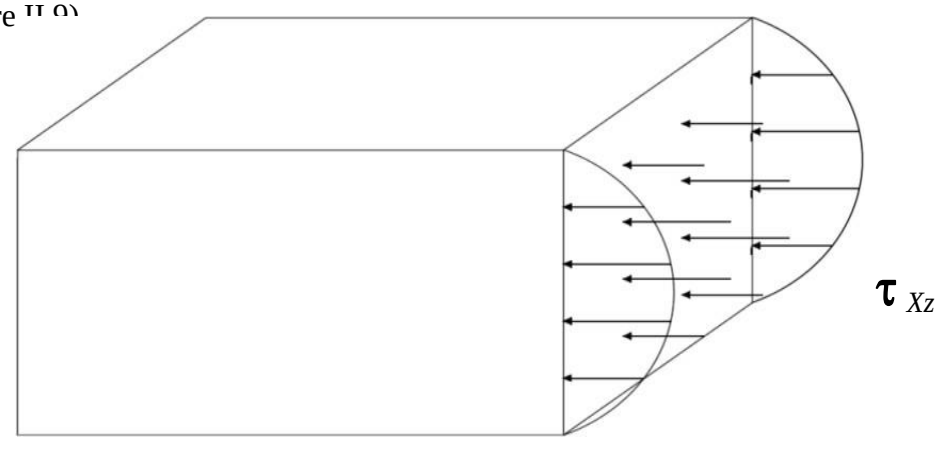

Figure II.9 la distribution (variable) des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur.

II.5 Conclusion

En résumé, la théorie des poutres est une branche fondamentale de la mécanique des structures qui permet l'analyse du comportement et de la réponse de ces éléments structurels critiques dans de nombreuses applications de génie civil et de génie mécanique. Au fil des siècles, cette théorie a été développée et enrichie par les contributions de mathématiciens, de physiciens et d'ingénieurs.

La théorie classique d'Euler-Bernoulli fournit une approche simplifiée et largement utilisée pour les poutres relativement longues et étroites avec une déformation transversale négligeable. Il permet une analyse rapide et efficace, adaptée à de nombreuses situations pratiques.

Raffinement de la théorie classique, la théorie de Timochenko considère les effets du cisaillement et de la déformation latérale et convient donc aux poutres plus courtes, plus épaisses ou soumises à des charges latérales importantes. La théorie des déformations de cisaillement d'ordre élevé de Reddy est une extension plus avancée qui prend en compte les déformations d'ordre élevé, permettant la gestion de géométries complexes et de chargements multidirectionnels.

Chaque approche présente des avantages et des limites, et la sélection de la théorie appropriée dépend des propriétés spécifiques du faisceau et de vos besoins d'analyse.

La théorie des poutres reste un outil essentiel pour les ingénieurs et les scientifiques dans la conception, l'analyse et la modélisation d'une grande variété de structures. Les avancées technologiques et les progrès des méthodes de calcul numérique continuent d'améliorer les capacités d'analyse des faisceaux, permettant d'aborder des problèmes de plus en plus complexes et réalistes.

Cependant, il est important de reconnaître que la théorie des poutres est un modèle simplifié de la réalité et a des limites pour des cas très particuliers ou des structures très complexes. Dans de telles situations, des approches plus sophistiquées et des modèles sophistiqués peuvent être nécessaires pour obtenir des résultats précis et fiables.

En fin de compte, la théorie des poutres est un pilier du génie civil qui permet aux concepteurs de créer des structures solides, sûres et efficaces qui répondent aux besoins de la société moderne.

Chapitre III

Etude du comportement thermodynamique des poutres FG bidirectionnelles poreuses

Etude du comportement thermodynamique des poutres FG bidirectionnelles poreuses

III.1 Introduction

III.2 Formulation du problème

III.2.1 Effet de porosité

III.3 Systèmes de fondation

III.4 Équations du mouvement

III.5 Équations d'équilibre

III.6. Solution du problème

III.7 Conclusion

III.1 Introduction

Dans ce chapitre, une formulation théorique basée sur un champ de déplacement quasi-3D est présentée pour l'étude du comportement thermodynamique des poutre poreuses bidirectionnelles en matériaux fonctionnellement gradué reposant sur fondation élastique. La cinématique utilisée contient des termes intégraux indéfinis avec un nombre de variable réduit. Les caractéristiques mécaniques de la poutre sont considérées comme variables dans les deux directions axiales et transversales selon une loi bien déterminée. Plusieurs types de fondation sont considérés dans la présente étude. Après avoir déterminé les équations gouvernantes, ces dernières sont résolues en utilisant la solution de Navier pour le cas des conditions d'appuis simplement appuyés.

III.2. Formulation du problème

Dans la figure III.1, un modèle de poutre poreuse FG bidirectionnelle **(BDFG)** de longueur "L", d'épaisseur "h" et de largeur "b" dans le système de coordonnées cartésiennes rectangulaires (x, y, z) est présentée.la poutre est supposée reposer sur une fondation élastque.

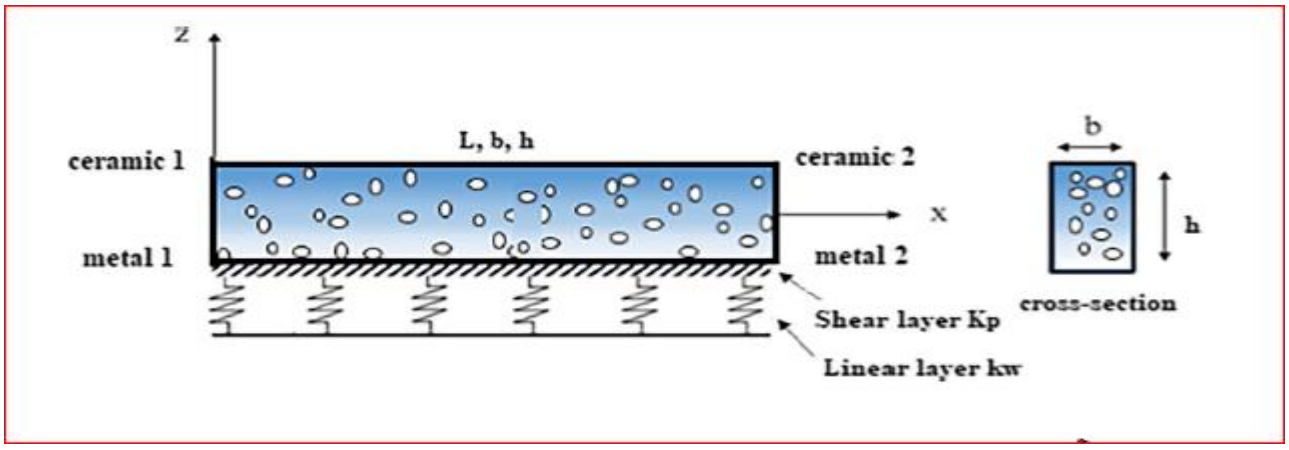

Figure III 1. Géométrie et coordonnées de la poutre poreuse BDFG reposant sur une fondation élastique.

III.2.1 Effet de porosité

Les porosités apparaissent comme un défaut dans les BDFG en raison de problèmes techniques dans le processus de production. Les porosités dans la poutre sont de deux types : régulières et irrégulières, comme la montre la figure III-2. Les propriétés du matériau efficace de la poutre FG, telles que le module d'élasticité E, le coefficient de Poisson γ et la densité massique ρ, sont déterminées en utilisant la lois de mélange modifiée dans laquelle la porosité est représentée par le coefficient « β ».

Par conséquent, la propriété matérielle P(x, z) peut être écrite pour chaque type de porosité en coordonnées x et z.

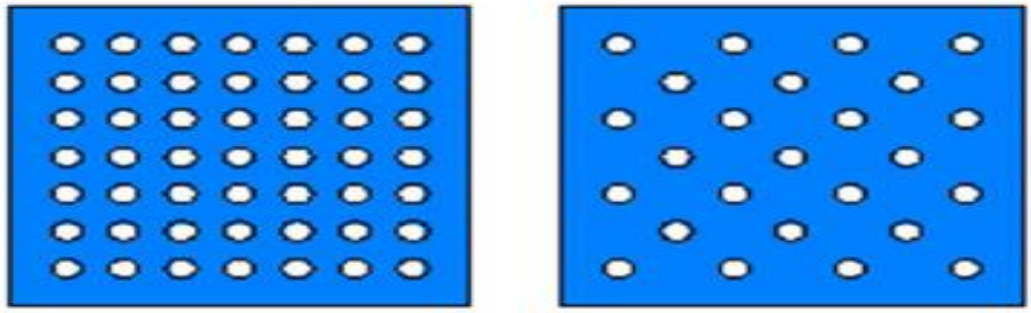

Figure III.2 Types de distributions de porosité [reddy et nathi 2022]

Le champ de déplacement quasi-3D utilisé dans cette étude est donnée par [Merzoug et al.2020],[Meksi et al.2021].

$$u(x,y,z,t) = u_0(x,y,t) - z\frac{\partial w_0}{\partial x} + f(z)\phi_x(x,y,t) \quad \text{(III.1.a)}$$

$$w(x,y,z,t) = w_0(x,y,t) + g(z)\theta(x,y,t) \quad \text{(III.1.b)}$$

Où : u_0 , w_0 , et φ_x sont trois déplacements inconnus du plan médian de la poutre, $f(z)$ désigne la fonction de forme représentant la variation des déformations et des contraintes de cisaillement transversales dans l'épaisseur.

En considérant que $\varphi_x = \int \theta(x,y)dx$, le champ de dé placement du présent modèle peut être exprimé sous une forme plus simple comme suit :

$$u(x,y,z,t) = u_0(x,y,t) - z\frac{\partial w_0}{\partial x} + k_1\, f(z)\int \theta(x,y,t)\,dx \quad \text{(III.2.a)}$$

$$w(x,y,z,t) = w_0(x,y,t) + g\left(z\right)\theta(x,y,t) \quad \text{(III.2.b)}$$

Dans ce travail, la présente théorie des poutres à déformation par cisaillement d'ordre supérieur est obtenue en définissant

$$f(z)=\frac{5}{4}z-\frac{5}{3}\frac{z^3}{h^2}, \qquad g(z)=\frac{2}{15}\frac{df(z)}{dz} \tag{III.3.a}$$

Les propriétés effectives de la poutre, comme le module d'Young, la densité de masse et le coefficient de Poisson, peuvent alors être exprimées par la règle du mélange comme suit

$$P(z)=P_m+\left(P_c-P_m\right)V-\frac{\beta}{2}\left(P_c+P_m\right) \quad ; \tag{III.3.b}$$

$$V=\left(\frac{z}{h}+0,5\right)^{n_z}\left(\frac{x}{L}\right)^{n_x} \tag{III.3.c}$$

Les indices *m* et *c* désignent le métal et la céramique.

Les propriétés matérielles d'une plaque FG parfaite peuvent être obtenues lorsque « β » est fixé à zéro

Les relations cinématiques peuvent être obtenues comme suit :

$$\varepsilon_x=\varepsilon_x^0+zk_x^b+f(z)k_x^s \;,\quad \{\gamma_{xz}\}=f'(z)\{\gamma_{xz}^0\}+g(z)\{\gamma_{xz}^1\} \;;\quad \varepsilon_z=g'(z)\,\varepsilon_z^0 \tag{III.4}$$

Où

$$\{\varepsilon_x^0\}=\left\{\frac{\partial u_0}{\partial x}\right\}, \qquad \begin{Bmatrix}k_x^b\\k_x^s\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-\dfrac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\\k_1\theta\end{Bmatrix} \tag{III.5.a}$$

$$\{\gamma_{xz}^0\}=\left\{k_1\int\theta\,dx\right\} \qquad \{\gamma_{xz}^1\}=\left\{\frac{\partial\theta}{\partial x}\right\} \tag{III.5.b}$$

$$\varepsilon_z^0=\theta \qquad g'(z)=\frac{dg(z)}{dz} \tag{III.5.c}$$

Les intégrales utilisées dans les équations ci-dessus doivent être résolues par une méthode de type Navier et peuvent être données comme suit :

$$\int\theta\,dx=A'\frac{\partial\theta}{\partial x} \tag{III.5.d}$$

Où le coefficient A' est exprimé en fonction du type de solution utilisé, en l'occurrence via Navier. Par conséquent, A' et k_1 sont exprimés comme suit :

$$A' = -\frac{1}{\alpha^2}\ ,\ k_1 = -\alpha^2 \tag{III.6}$$

Où α est défini comme suit : α=mπ/a (équation III.24)

Pour les FMG élastiques et isotropes, les relations constitutives peuvent être exprimées comme suit:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_z \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{12} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x - \alpha(z)T \\ \varepsilon_z - \alpha(z)T \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \tag{III.7}$$

Dans le cas quasi-3D, nous aurons:

$$C_{11} = C_{22} = \frac{[1-\nu(z)]E(z)}{[1-2\nu(z)][1+\nu(z)]}, \tag{III.8.a}$$

$$C_{12} = \frac{E(z)\nu(z)}{[1-2\nu(z)][1+\nu(z)]}, \tag{III.8.b}$$

$$C_{55} = \frac{E(z)}{2[1+\nu(z)]}. \tag{III.8.c}$$

III.3 Système de fondation

Dans cette étude, nous considérerons que la poutre repose sur plusieurs types de fondations.

III.3.1 Fondation élastique de Winkler

Le modèle de Winkler est le plus simple. La force de réaction de la fondation est donnée par (Winkler 1867)

$$f_e = k_w w \tag{III.9.a}$$

Où k_w est le paramètre de Winkler.

III.3.2. Fondation élastique de Pasternak

Ce modèle est également connu sous le nom de modèle à deux paramètres. Il est décrit par la relation suivante :

$$f_e = k_w\, w - k_P \nabla^2 w \tag{III.9.b}$$

Où k_P est le paramètre de Pasternak et ∇^2 est l'opérateur de Laplace donné par :

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \tag{III.9.c}$$

III.3.3 Fondation élastique de Kerr

La fondation du modèle de Kerr est un modèle élastique à trois paramètres qui se compose d'une couche de cisaillement (avec rigidité) indépendante des couches élastiques supérieure (avec rigidité) et inférieure (avec rigidité) (modélisées par des ressorts distribués). La réaction distribuée du modèle de fondation Kerr est définie comme suit [Shahsavari et al. 2018].

$$f_e = \left[\frac{k_l k_u}{k_l + k_u}\right] w - \left[\frac{k_p k_u}{k_l + k_u}\right] \nabla^2 w \tag{III.9.d}$$

III. 3 .4 Fondation Kelvin-Voigt

Une faiblesse du modèle de Winkler est l'absence de viscoélasticité. Le modèle de Kelvin-Voigt inclut ce paramètre et présente le comportement du sol comme une série de ressorts discrets parallèles à des amortisseurs [Younesian et al. 2019] :

$$f_e = k_w\, w + c\, \dot{w} \tag{III.9.e}$$

Où c est le coefficient d'amortissement de la fondation.

III.3.5 Fondation Visco-Pasternak (modèle viscoélastique non linéaire Kelvin-Voigt modifié)

Le modèle visco-Pasternak est composé de deux couches. La première est composée de l'amortisseur et du ressort de Winkler connectés en parallèle et la seconde représente la couche de cisaillement de Pasternak. L'interaction entre la poutre viscoélastique et la fondation visco-Pasternak peut être exprimée comme suit [Hashemi et al. 2015].

$$f_e = k_w w - k_p \nabla^2 w + c\dot{w} \tag{III.9.f}$$

III.3.6 Fondation à élasticité variable

La poutre est supposée reposer sur un modèle de fondation élastique à deux paramètres, qui consiste en des ressorts étroitement espacés interconnectés par une couche de cisaillement composée d'éléments verticaux incompressibles, qui se déforment uniquement sous l'effet du cisaillement transversal. L'équation de réponse de cette fondation est donnée:

$$f_e(x,y) = \overline{K}(x)\, w(x,y) + \overline{G}\,\nabla^2 w(x,y) \tag{III.10}$$

Où f_e est la densité de la force de réaction de la fondation élastique, $\overline{K}$ est le paramètre de Winkler dépendant de *x* uniquement. Il est supposé être linéaire, parabolique ou sinusoïdal [Sobhy 2015], [Attia et al. 2018],[Pradhan et Murmu 2009] :

$$\overline{K}(x) = \frac{J_1 h^3}{L^4}\begin{cases} 1+\xi\dfrac{x}{L} & \text{Linéaire} \\ 1+\xi\left(\dfrac{x}{L}\right)^2 & \text{Parabolique} \\ 1+\xi\sin\left(\pi\dfrac{x}{L}\right) & \text{Sinusoïdale} \end{cases} \tag{III.11}$$

Dont J_1 est une constante et ξ est un paramètre varié. $\overline{G}$ est la rigidité de la fondation de la couche de cisaillement, ∇^2 est l'opérateur de Laplace en *x*, et w est la déflexion de la poutre. Notez que si $\xi = 0$ la fondation élastique devient une fondation de Pasternak et si la rigidité de la fondation de la couche de cisaillement est négligée, la fondation de Pasternak devient la fondation de Winkler.

III.3.4 Equations du mouvement

Le principe de Hamilton est utilisé pour déterminer les équations du mouvement :

$$0 = \int_0^t (\delta U + \delta V - \delta K)\, dt \tag{III.12}$$

Où U est la variation de l'énergie de déformation ; est V la variation de l'énergie potentielle de la fondation ; et K est la variation de l'énergie cinétique.

$$\delta U = \int_x [N_x \delta\varepsilon_x^0 + N_z \delta\varepsilon_z^0 + M_x^b \delta k_x^b + M_x^s \delta k_x^s + Q_{xz}\delta\gamma_{xz}^0 + S_{xz}\delta\gamma_{xz}^1]dx \tag{III.13}$$

Où ***A*** est la surface ; et les résultantes des contraintes *N, M, Q,* et *S* sont définies par :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ M_x^b \\ M_x^s \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ f(z) \end{Bmatrix} dz \tag{III.14.a}$$

$$N_z = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_z \ \mathrm{g'(z)}\, dz \quad , \quad S_{xz} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} \mathrm{g(z)}\, dz \quad , \quad Q_{xz}^s = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} \ f'(z)\, dz \tag{III.14.b}$$

La variation de l'énergie potentielle de la fondation

$$\delta V = \int_x f_e \delta w dx \tag{III.15}$$

La variation de l'énergie cinétique de la poutre peut être exprimée comme suit :

$$\delta\ K = \int_x \int_z \left[\dot{u}\,\delta\ \dot{u} + \dot{w}\,\delta\ \dot{w}\right]\ \rho(z) dx dz$$

$$\int_x \left[\begin{array}{l} I_0\left[\dot{u}_0\delta\dot{u}_0 + \dot{v}_0\delta\dot{v}_0\right] - I_1\left(\dot{u}_0 \dfrac{\partial\delta\dot{w}_0}{\partial x} + \dfrac{\partial\dot{w}_0}{\partial x}\delta\ \dot{u}_0\right) + J_1\left(k_1\, A'\right)\left(\dot{u}_0 \dfrac{\partial\delta\,\dot{\theta}}{\partial x} + \dfrac{\partial\dot{\theta}}{\partial x}\delta\ \dot{u}_0\right) \\ + J_1^{st}\left(\dot{w}_0\delta\ \dot{\theta} + \dot{\theta}\delta\dot{w}_0\ \right) + I_2\left(\dfrac{\partial\dot{w}_0}{\partial x}\dfrac{\partial\delta\ \dot{w}_0}{\partial x}\right) + K_2\left[\left(k_1\, A'\right)^2\left(\dfrac{\partial\dot{\theta}}{\partial x}\dfrac{\partial\delta\ \dot{\theta}}{\partial x}\right)\right] \\ - J_2\left(k_1\, A'\right)\left(\dfrac{\partial\dot{w}_0}{\partial x}\dfrac{\partial\delta\ \dot{\theta}}{\partial x} + \dfrac{\partial\dot{\theta}}{\partial x}\dfrac{\partial\delta\ \dot{w}_0}{\partial x}\right) + K_2^{st}\dot{\theta}\delta\ \dot{\theta} \end{array}\right] dx \tag{III.16}$$

Où la convention de l'indice de point indique la différenciation par rapport à la variable temporelle « t »; est $\rho(z)$ la densité de masse donnée par l'équation; et (I_i, J_i, K_i,) sont des inerties de masse exprimées par :

$$\left(I_0, I_1, I_2\right) = \int_{-h/2}^{h/2} \left(1, z, z^2\right)\rho(z) dz \tag{III.17.a}$$

$$\left(J_1, J_1^{st}, J_2, K_2, K_2^{st}\right) = \int_{-h/2}^{h/2} \left(f, g, z\, f, f^2, g^2\right)\rho(z) dz \tag{III.17.b}$$

En substituant les Eqs. (III.13), (III.15), (III.16) et (III.19) dans l'Eq. (III.12), on obtient ce qui suit :

$$\begin{aligned}
&\int_x \left(\frac{\partial N_x}{\partial x} - I_0 \ddot{u}_0 + I_1 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial x} - k_1 A' J_1 \frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial x} \right) \delta u_0 dx = 0 \\
&\int_x \left(\frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} - I_0 \ddot{w}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + I_2 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial x} - J_2 k_1 A' \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial x^2} + R \right) \delta w_0 dx = 0 \\
&\int_x \left(\begin{array}{l} -\mathrm{k}_1 A' \frac{\partial^2 M_x^s}{\partial x^2} - N_z + k_1 A' \frac{\partial Q_{xz}^s}{\partial x} - \frac{\partial S_{xz}^s}{\partial x} + J_1 k_1 A' \frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + K_2 \left(k_1 A' \right)^2 \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial x^2} \\ -J_2 k_1 A' \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial x^2} - g(z) R \end{array} \right) \delta\theta dx = 0
\end{aligned} \tag{III.18}$$

Les résultantes des contraintes sont obtenues comme suit :

$$\begin{Bmatrix} N \\ M_x^b \\ M_x^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & B^s \\ B & D & D^s \\ B^s & D^s & H^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ k_x^b \\ k_x^s \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} L \\ L^a \\ R \end{bmatrix} \varepsilon_0^z \tag{III.19}$$

$$\begin{Bmatrix} Q \\ S \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} F^s & X^s \\ X^s & A^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma^0 \\ \gamma^1 \end{Bmatrix} \tag{III.19.a}$$

$$N_z = R^a \varepsilon_z^0 + L \varepsilon_x^0 + L^a k_x^b + R k_x^s \tag{III.19.b}$$

Où

$$S = \{S_{xz}\},\ Q = \{Q_{xz}\} \tag{III.19.c}$$

$$\begin{Bmatrix} L \\ L^a \\ R \\ R^a \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} C_{12} \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ f(z) \\ g'(z) \end{Bmatrix} g'(z) dz \tag{III.19.d}$$

$$\left\{ A_{11}, B_{11}, D_{11}, B_{11}^s, D_{11}^s, H_{11}^s \right\} = \int_{-h/2}^{h/2} C_{11} \left[1, z, z^2, f(z), z f(z), f^2(z) \right] dz \tag{III.19.e}$$

$$(F_{44}^s, X_{44}^s, A_{44}^s) = \int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{E(z,T)}{2(1+\nu)} \left[f'^2(z), f'(z) g(z), g^2(z) \right] \right) dz \tag{III.19.f}$$

La variation du champ de température à travers l'épaisseur est donnée par :

$$T(x,y,z,t) = \hat{t}(z)\hat{T}(x,y,t), \tag{III.20.a}$$

$$\hat{t}(z) = T^{-}e^{\gamma\left(\frac{z}{h}+\frac{1}{2}\right)^{\eta}} \quad , \quad \gamma = \ln\left(\frac{T^{+}}{T^{-}}\right) = \ln\left(T_r\right) \quad , \quad 0 \le \eta \le \infty \tag{III.20.b}$$

Où

$$\hat{T}(x,y,t) = \bar{t}\sin(\lambda x)\sin(\mu y)e^{i\omega t} \tag{III.20.c}$$

Où $\bar{t}$ est un paramètre arbitraire T^{+} et T^{-} sont les températures du haut et du bas. Dans lequel η est l'exposant de la température. Notez que $\eta=0$ représente la température de la surface supérieure de la poutre tandis que $\eta=\infty$ représente la température de la surface inférieure.

III.5. équations d'équilibre

En introduisant l'équation (III.20) dans l'équation (III.19), les équations du mouvement peuvent être exprimées en termes de déplacements (u_0, w_0, θ) : et les équations appropriées prennent la forme suivante :

$$\int_x \begin{bmatrix} (A_{11})d_{11}u_0 - (B_{11})d_{111}w_0 + \left(B^s_{11}\right)k_1A'd_{111}\theta \\ +Ld_1\theta - I_0\ddot{u}_0 + I_1d_1\ddot{w}_0 - J_1A'k_1d_1\ddot{\theta} \end{bmatrix} \delta u_0 dx = 0 \tag{III.21.a}$$

$$\int_x \begin{bmatrix} (B_{11})d_{111}u_0 - (D_{11})d_{1111}w_0 + k_1A'\left(D^s_{11}\right)d_{1111}\theta + L^a d_{11}\theta - f_e \\ -k_1A'E^{sT}_{33}d_{11}\theta - I_0\ddot{w}_0 - I_1d_1\ddot{u}_0 + I_2d_{11}\ddot{w}_0 - k_1A'J_2d_{11}\ddot{\theta} \end{bmatrix} \delta w_0 dx = 0 \tag{III.21.b}$$

$$\int_x \begin{bmatrix} -k_1A'\left[\left(B^s_{11}\right)d_{111}u_0\right] + k_1A'\left[\left(D^s_{11}\right)d_{1111}w_0\right] - \left(k_1A'\right)^2\left[\left(H^s_{11}\right)d_{1111}\theta\right] \\ -Ld_1u_0 + L^a d_{11}w_0 - 2k_1A'Rd_{11}\theta - R^a\theta + \left(A^s_{44} + \left(k_1A'\right)^2F^s_{44} + 2k_1A'X^s_{44}\right)d_{11}\theta \\ +k_1A'J_1d_1\ddot{u}_0 - k_1A'J_2d_{11}\ddot{w}_0 + \left(k_1A'\right)^2K_2d_{11}\ddot{\theta} - g(z)f_e \end{bmatrix} \delta\theta dx = 0 \tag{III.21.c}$$

III .6 Solution analytique pour les poutres poreuses BDFG simplement appuyées

Dans ce paragraphe, la solution de Navier pour les poutres simplement appuyées sera utilisée pour résoudre le problème. La représentation suivante pour les quantités de déplacement, qui satisfont aux conditions limites ci-dessus, est appropriée dans le cas de notre problème.

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ w_0 \\ \theta \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} U_m e^{i\omega t} \dfrac{\partial X(x)}{\partial x} \\ W_m e^{i\omega t} X(x) \\ X_m e^{i\omega t} X(x) \end{Bmatrix} \tag{III.22}$$

Pour des conditions aux limites simplement soutenues

$$X(x) = \sin(\alpha x) \tag{III.23}$$

Où ω est la fréquence de vibration libre de la poutre, √i=-1 :l'unité imaginaire.

Avec

$$\alpha = m\pi / a \tag{III.24}$$

En substituant l'Equation. (III.22) à l'Equation. (III.21), on obtient le problème suivant :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_m \\ W_m \\ X_m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{III.25}$$

Où

$$\begin{aligned}
a_{11} &= \int_x \left[(A_{11}) d_{111} X + I_0 d_1 X \, \omega^2 \right] d_1 X \, dx \\
a_{12} &= \int_x \left[-(B_{11}) d_{111} X - I_1 d_1 X \, \omega^2 \right] d_1 X \, dx \\
a_{13} &= \int_x \left[k_1 A' \left(B_{11}^s \right) d_{111} X + L d_1 X + k_1 A' J_1 d_1 X \, \omega^2 \right] d_1 X \, dx \\
a_{21} &= \int_x \left[(B_{11}) d_{1111} X + I_1 d_{11} X \, \omega^2 \right] X \, dx \\
a_{21} &= \int_x \left[-(D_{11}) d_{1111} X + I\,0 X \, \omega^2 - I_2 d_{11} X \, \omega^2 - \overline{K}(x) X + \overline{G} d_{11} X \right] X \, dx \\
a_{32} &= \int_x \left[k_1 A' \left(D_{11}^s \right) d_{1111} X + \left(L^a \right) d_{11} X + k_1 A' J_2 d_{11} X \, \omega^2 + J_1^{st} X \, \omega^2 \right] X \, dx
\end{aligned} \tag{III.26}$$

$$\begin{aligned}
a_{31} &= \int_x \left[-k_1 A' \left(B_{11}^s \right) d_{1111} X - L d_{11} X - k_1 A' J_1 d_{11} X \, \omega^2 \right] X \, dx \\
a_{32} &= \int_x \left[k_1 A' \left(D_{11}^s \right) d_{1111} X + \left(L^a \right) d_{11} X + k_1 A' J_2 d_{11} X \, \omega^2 + J_1^{st} X \, \omega^2 \right] X \, dx \\
a_{33} &= \int_x \left[\begin{array}{l} -\left(k_1 A' \right)^2 \left(H_{11}^s \right) d_{1111} X - R^a X - \left(k_1 A' \right)^2 K_2 d_{11} X \, \omega^2 + K_2^{st} X \, \omega^2 \\ + \left(A_{44}^s + \left(k_1 A' \right)^2 F_{44}^s d_{11} X + 2 X_{44}^s k_1 A' d_{11} X - 2 k_1 A' R \right) d_{11} X \end{array} \right] X \, dx
\end{aligned}$$

III.7. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté une solution analytique basée sur une théorie de déformation de cisaillement quasi-3D pour l'étude du comportement thermodynamique des poutres FG bidirectionnelles poreuses reposant sur plusieurs types de fondations. La cinématique utilisée comporte des termes intégraux indéterminés et impliquait seulement trois fonctions inconnues. Après détermination des équations gouvernantes, une solution analytique a été utilisée pour déterminer les contraintes et la d. Des résultats numériques seront présentés et discutés dans le chapitre suivant.

CHAPITRE IV

DISCUSSION DES RESULTATS ET ANALYSE

IV.1 Introduction

Dans cette partie de thèse, après la formulation mathématique du problème présentée au chapitre précèdent, des résultats numériques sous forme de graphes explicites sont présentés afin d'étudier le réponse thermodynamique des poutres poreuses BDFG sur assise élastique. Chaque graphe et commenté, analysé puis les conclusions nécessaires sont tirées. Il est à noter que la validation des résultats obtenues et faites seulement avec un seul tableau vu que le sujet n'était pas traité auparavant.

IV.2 Etude paramétrique.

Dans cette section, des résultats numériques sont exposés pour étudier la réponse thermodynamique des poutres poreuses BDFG reposant sur une fondation élastique dans le cadre de la solution quasi 3D proposée.

Les résultats en termes de flèche et de contraintes de la poutre poreuse BDFG sous l'influence de plusieurs paramètres, c'est-à-dire les indices matériels, le paramètre de porosité, les paramètres de la fondation élastique et le type de la fondation élastique sont calculés en tenant compte des conditions de chargement thermodynamiques.

Comme indiqué ci-dessus, et en l'absence de travaux antérieurs sur le même sujet, les résultats des modèles actuels n'ont pas été validés par rapport à la littérature.

Pour cette étude, une poutre BDFG constituée d'un mélange de céramique et métal avec les caractéristiques suivantes est utilisée :

- Métal (Aluminium, Al): $E_m = 70GPa$; $\upsilon = 0.3$; $\rho_m = 2702Kg/m^3$
- Céramique (ZrO_2) : $E_c = 200GPa$; $\upsilon = 0.3$; $\rho_c = 5700Kg/m^3$

Par commodité, les expressions adimensionnelles suivantes ont été utilisées pour calculer les déplacements, les contraintes et les paramètres des fondations :

$$\bar{w} = -\mathrm{Re}\frac{10D_0 w}{L^4} \quad ; \quad \bar{\sigma}_{xx} = -\frac{0.001h^2\,\mathrm{Re}(\sigma_x)}{L^2} \quad ; \quad \bar{\tau}_{xz} = -\frac{0.001h}{L}\tau_{xz}; D_0 = \frac{E_c h^3}{12(1-\upsilon^2)}$$

Tableau IV. 1 : Déplacements et contraintes d'une poutre parfaite FG bidirectionnelle sans fondation élastique

n_z, n_x		**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
n_x=1	$\overline{w}$	0.4107	0.3837	0.3736	0.3668	0.3618
	$\overline{\sigma}_{xx}$	0.5551	0.5503	0.5476	0.5461	0.5452
	$\overline{\tau}_{xz}$	0.0744	0.0700	0.0663	0.0640	0.0626
n_z=1	$\overline{w}$	0.4257	0.3837	0.3666	0.3569	0.3506
	$\overline{\sigma}_{xx}$	0.8225	0.5503	0.4162	0.3495	0.3161
	$\overline{\tau}_{xz}$	0.1516	0.0700	0.0665	0.0646	0.0634

Le tableau IV-1 montre les effets de la variation des indices matériels "*nx* " et "*nz* " sur les déplacements et les contraintes pour une poutre parfaite BDFG sans fondation élastique sous chargement thermodynamique.

Ce tableau montre que l'augmentation des indices matériels (***nx*** et ***nz***) dans l'une ou l'autre direction entraîne une réduction des déplacements et des contraintes. En fait, l'augmentation des indices de classement accroît la quantité de la céramique dans la poutre et, par conséquent, la poutre devient plus rigide, ce qui entraîne une réduction des déplacements et des contraintes.

Une autre remarque intéressante est que la poutre à gradation transversale (***nx*** =0 et ***nz*** =1) donne des résultats plus élevés en termes de déplacements et de contraintes par rapport à la poutre à gradation axiale (***nx*** =1 et ***nz*** =0).

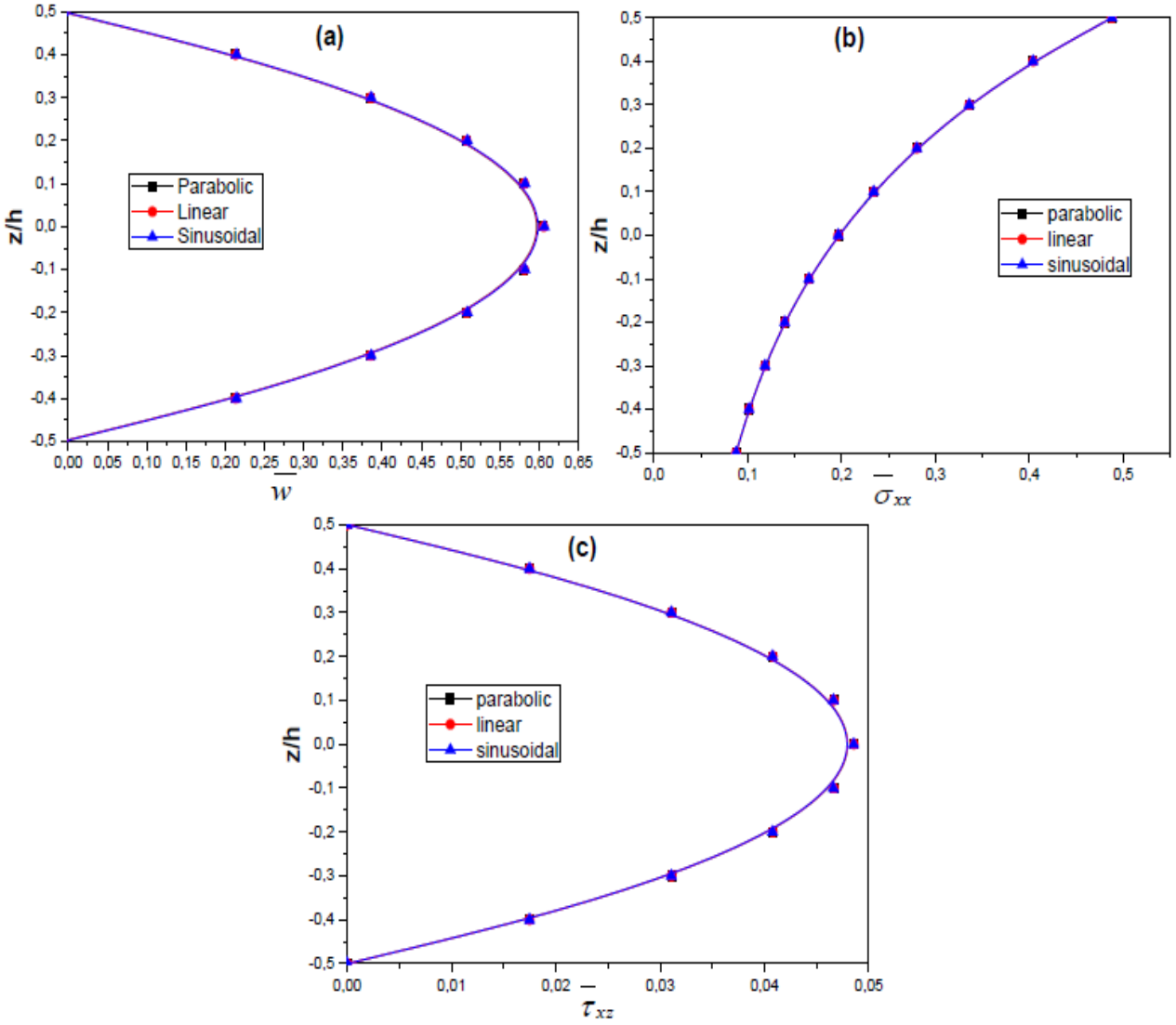

Fig. IV. 1. Effet de la fondation élastique variable sur les déplacements et les contraintes de la poutre poreuse BDFG sous chargement thermodynamique (a) variation de la flèche à travers l'épaisseur (b) variation de la contrainte axiale à travers l'épaisseur (c) variation de la contrainte tangentielle à travers l'épaisseur $\left(\xi = 10, n_x = n_z = 1, \quad j_1 = j_2 = 10^6, \beta = 0.1\right)$

La figure IV-1 présente l'effet de la fondation élastique variable sur la réponse d'une poutre poreuse BDFG soumise à un chargement thermodynamique. Comme on peut le voir sur cette figure, les trois types de fondations élastiques variables - linéaire, parabolique et sinusoïdale - donnent les mêmes résultats, ce qui nous amène à dire que le type de fondation variable n'a pratiquement aucun effet sur la réponse de la poutre poreuse BDFG.

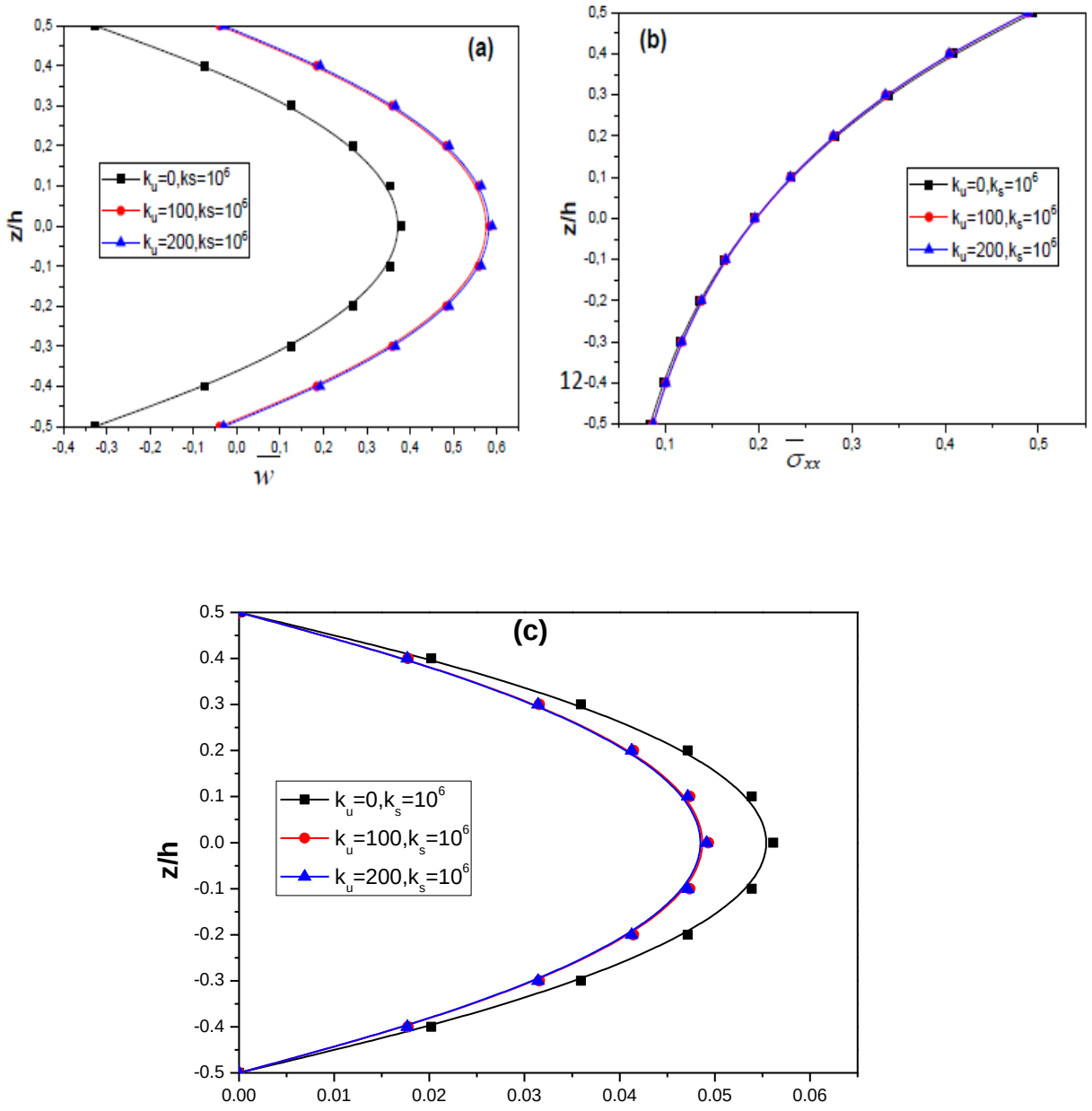

Fig. IV.2. Effet de la fondation élastique de Kerr sur les déplacements et les contraintes de la poutre poreuse BDFG sous chargement thermodynamique (a) variation de la flèche à travers l'épaisseur (b) variation de la contrainte axiale à travers l'épaisseur (c) variation de la contrainte tangentielle à travers l'épaisseur $\left(n_x = n_z = 1, \quad K_1 = 100, \ \beta = 0.1\right)$

La figure IV-2 illustre l'effet de la fondation élastique de Kerr sur le comportement d'une poutre poreuse BDFG sous chargement thermodynamique. Cette figure montre que les contraintes normales sont insensibles aux paramètres de la fondation de Kerr, alors que les déplacements et les contraintes

tangentielles ne le sont pas. Il convient de noter que ce résultat est valable pour de faibles valeurs des coefficients Ks et Ku, qui représentent la rigidité des deux couches de la fondation de Kerr.

En effet, les déplacements les plus élevés sont obtenus pour une fondation de Kerr avec deux couches de ressorts (qui représente le modèle de Kerr) par rapport au cas d'une fondation avec une seule couche de ressorts (*Ku=0*, qui représente le modèle de Pasternak). Pour les contraintes tangentielles, l'inverse est observé.

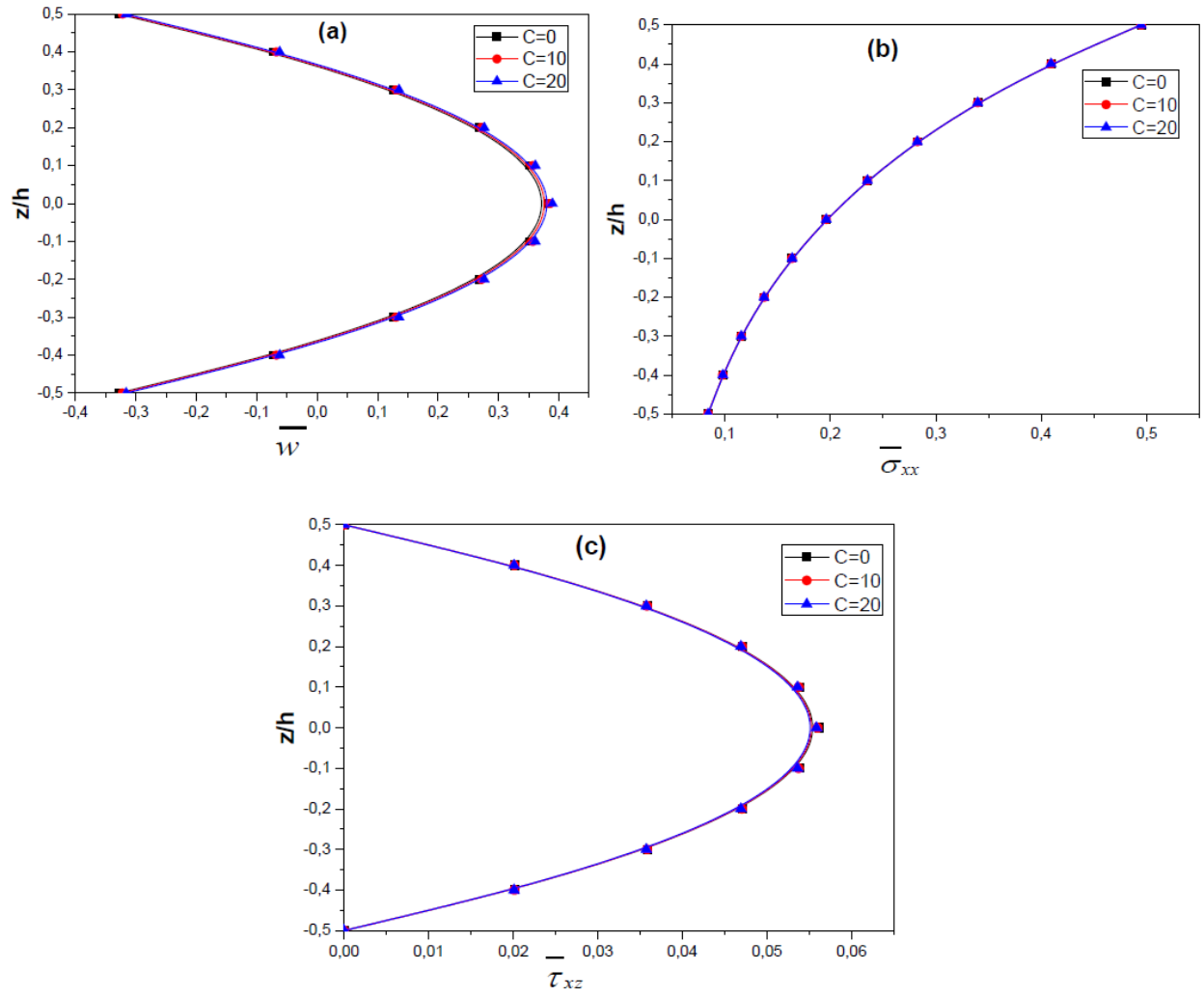

Fig.IV.3. Effet de la fondation viscoélastique sur les déplacements et les contraintes de la poutre poreuse BDFG sous chargement thermodynamique (a) variation de la flèche à travers l'épaisseur (b) variation de la contrainte axiale à travers l'épaisseur (c) variation de la contrainte tangentielle à travers l'épaisseur $\left(n_x = n_z = 1, \quad K_w = 100, \ \beta = 0.1\right)$

La figure IV-3 illustre l'effet du coefficient d'amortissement *C* de la fondation viscoélastique sur les déplacements et les contraintes d'une poutre poreuse BDFG soumise à un chargement thermodynamique.

Les déplacements et les contraintes ne changent pas en fonction du coefficient d'amortissement *C*. Cela permet de conclure que la fondation viscoélastique avec une faible valeur du coefficient d'amortissement *C* n'a pas d'effet significatif sur le comportement de la poutre poreuse BDFG. Il est évident qu'en augmentant les valeurs de ce dernier, les résultats seront différents.

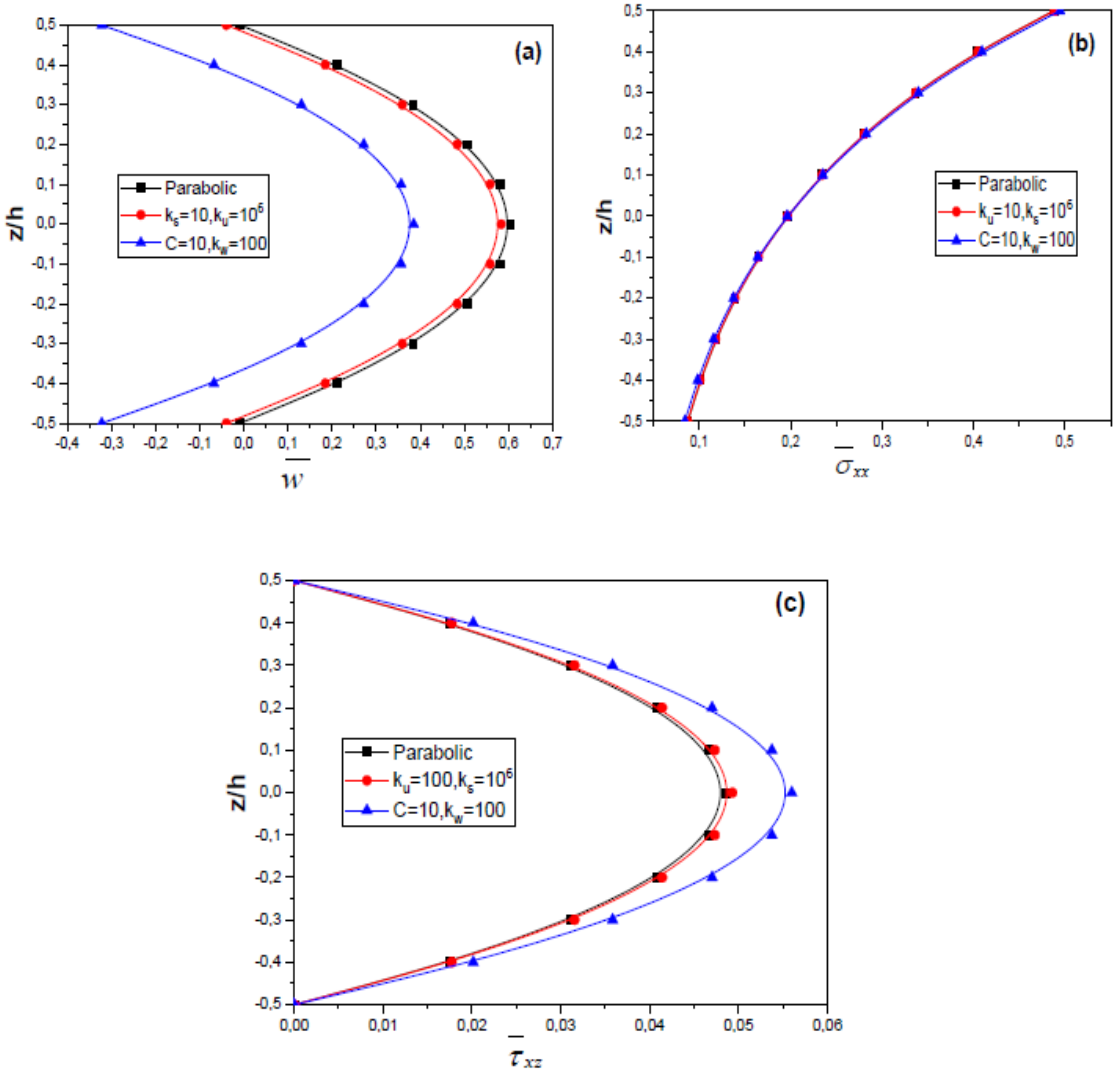

Fig. IV. 4. Effet du type de fondation élastique sur les déplacements et les contraintes de la poutre poreuse BDFG sous chargement thermodynamique (a) variation de la flèche à travers l'épaisseur (b) variation de la contrainte axiale à travers l'épaisseur (c) variation de la contrainte tangentielle à travers l'épaisseur $\left(n_x = n_z = 1, \quad \beta = 0.1\right)$

La figure IV-4 montre la variation des déplacements et des contraintes à travers l'épaisseur de la poutre poreuse BDFG pour trois cas de fondation : variable, Kerr et viscoélastique. Comme mentionné précédemment, le type de fondation n'a pas d'effet sur les contraintes normales, alors que les déplacements et les contraintes tangentielles sont sensibles au type de fondation. En effet, les déplacements maximaux d'une poutre poreuse BDFG reposant sur une fondation variable de type parabolique sont près de 40% plus élevés que les déplacements de la même poutre sur une fondation viscoélastique avec une faible valeur du coefficient d'amortissement *C*. En revanche, la différence entre l'effet des fondations Kerr et variable sur les déplacements n'est pas aussi importante que dans le cas d'une fondation viscoélastique. Pour les contraintes tangentielles, l'inverse est observé. Une poutre poreuse BDFG reposant sur une fondation viscoélastique génère des contraintes 14% plus élevées que la même poutre sur d'autres types de fondations.

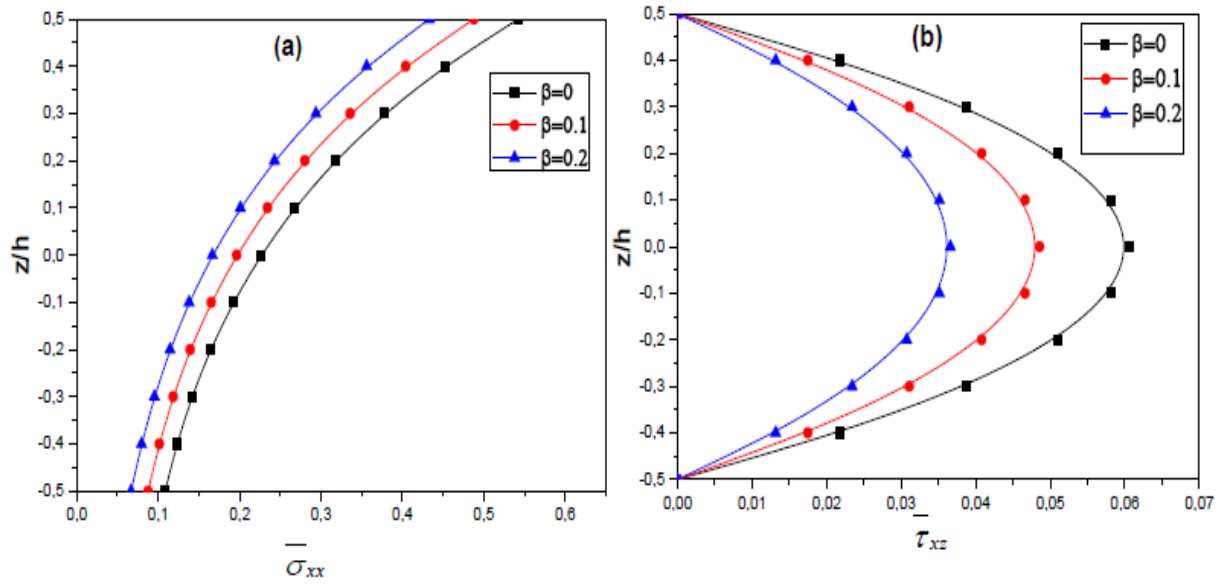

Fig. IV. 5. Effet de la distribution de la porosité sur les contraintes de la poutre BDFG sous chargement thermodynamique reposant sur une fondation élastique linéaire (a) variation de la contrainte axiale à travers l'épaisseur (b) variation de la contrainte tangentielle à travers l'épaisseur

$$\left(\xi = 10, n_x = n_z = 1 \quad j_1 = j_2 = 10^6\right)$$

L'effet du pourcentage de porosité sur les contraintes de la poutre BDFG reposant sur une fondation élastique et soumise à un chargement thermodynamique est représenté dans la figure IV-5. L'augmentation du coefficient de porosité, β tend à diminuer les contraintes dans la poutre BDFG. L'augmentation du pourcentage de pores dans la poutre réduit sa rigidité. Par conséquent, les déplacements et les contraintes augmentent, ce qui est logique. Les résultats de la figure 6 montrent le contraire, en raison des expressions adimensionnelles. En outre, les contraintes tangentielles

maximales ont été trouvées au milieu de la section transversale (*z/h=0*), ce qui montre que pour cette composition de matériau *nx* =*nz* =1, la poutre est symétrique. De plus, comme le montre la figure, la section transversale de la poutre est dans un état de contrainte normale positive avec des contraintes de traction maximales en un point de la surface supérieure.

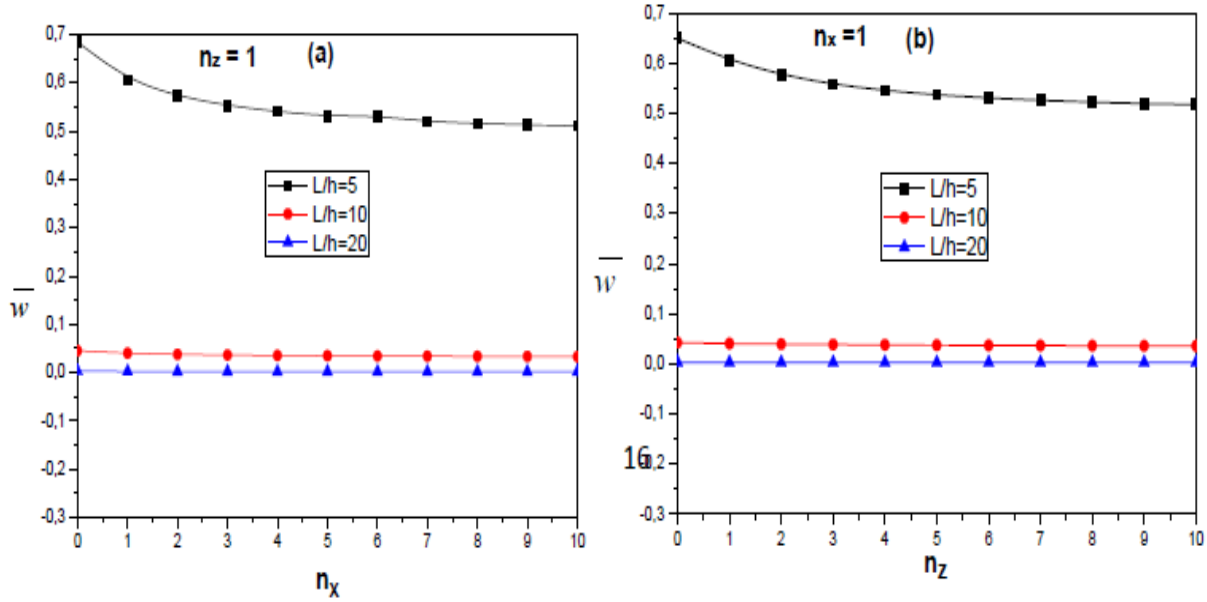

Fig. IV.6. Effet des indices de gradation sur les déplacements d'une poutre poreuse BDFG reposant sur une fondation élastique linéaire pour différents taux d'élancement. $\left(\xi = 10, \quad j_1 = j_2 = 10^6\right)$

L'impact des indices de gradation sur les déplacements de la poutre poreuse BDFG reposant sur une fondation élastique linéaire pour différents rapports d'élancement sont illustrés qualitativement dans la figure IV-6. Comme il est indiqué, les déplacements augmentent en diminuant le rapport d'élancement pour toutes les valeurs des indices matériels. Logiquement, c'est l'inverse qui se produit. Cependant, cela s'explique par la forme non dimensionnelle utilisée pour les déplacement, le "*L*" est dans le dénominateur, donc lorsque le "*L*" augmente, le déplacement diminue.

IV.3 Conclusion

Ce chapitre fournit une formulation mathématique pour prédire la réponse d'une poutre poreuse BDFG reposant sur différents types de fondations et soumise à une charge thermodynamique. Une solution quasi 3D a été utilisée pour décrire la cinématique pour les structures minces et épaisses. Le matériau est gradué dans les deux directions de la poutre selon une loi de puissance généralisée. Une étude paramétrique a été réalisée pour montrer l'effet de différents paramètres sur la réponse de la poutre poreuse BDFG reposant sur une fondation élastique.

Les principales conclusions sont résumées ci-dessous :

- Les paramètres de gradation (*nx* et *nz*) ont des effets significatifs sur la réponse de la poutre poreuse BDFG. En augmentant *nx* et *nz*, le déplacement et la contrainte sont réduits.
- Le type de fondation variable n'a pratiquement aucun effet sur la réponse de la poutre poreuse BDFG.
- Les contraintes normales sont insensibles aux paramètres de la fondation de Kerr, alors que les déplacements et les contraintes tangentielles ne le sont pas.
- Pour des valeurs faibles, le coefficient d'amortissement *C* n'a pas d'effet sur les déplacements et les contraintes.
- La poutre poreuse BDFG reposant sur une fondation Kerr ou sur une fondation à élasticité variable de type parabolique a des déplacements supérieurs de 40% à ceux de la même poutre sur une fondation viscoélastique.

CONCLUSION GENERALE

Dans le cadre de ce travail, qui été consacré à l'étude du comportement thermodynamiques des poutres FG bidirectionnelle sur fondation élastique, on a divise la thèse sur quatre chapitres, le premier a traite d'une façon générale et courtes les matériaux fonctionnellement gradues, leurs début, leurs évolutions et les différents méthodes de fabrications , le domaine d'application de ces matériaux sans s'élargir tout un bref rappel, par contre dans le deuxième chapitre on a parlé des théories des poutres, en partant de la théorie classique d'Euler Bernoulli, passant par la théorie de Timoshenko pour aboutir en fin de chapitre à la théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé.

Dans le chapitre 3et 4 qui font l'objet principale de cette thèse, après une formulation mathématique basée sur une solution quasi 3D pour l'étude du comportement thermodynamique des poutres BDFG poreuses reposant sur différentes fondations élastiques, une panoplie de résultats sous formes de graphes et figures explicites est présentée.

Les principaux résultats obtenus lors de cette étude montrent que la poutre à gradation transversale (***nx*** =0 et ***nz*** =1) donne des résultats plus élevés en termes de déplacements et de contraintes par rapport à la poutre à gradation axiale (***nx*** =1 et ***nz*** =0), par contre les trois types de fondations élastiques variables - linéaire, parabolique et sinusoïdale - donnent les mêmes résultats, ce qui nous amène à dire que le type de fondation variable n'a pratiquement aucun effet sur la réponse de la poutre poreuse BDFG,de plus Les déplacements et les contraintes ne changent pas en fonction du coefficient d'amortissement *C*. Cela nous a permis de dire que la fondation viscoélastique avec une faible valeur du coefficient d'amortissement *C* n'a pas d'effet significatif sur le comportement de la poutre poreuse BDFG.

En plus, les déplacements et les contraintes tangentielles sont sensibles au type de fondation. En effet, les déplacements maximaux d'une poutre poreuse BDFG reposant sur une fondation variable de type parabolique sont près de 40% plus élevés que les déplacements de la même poutre sur une fondation viscoélastique avec une faible valeur du coefficient d'amortissement *C*. En revanche, la différence entre l'effet des fondations Kerr et variable sur les déplacements n'est pas aussi importante que dans le cas d'une fondation viscoélastique.

Bien que ce document traite de l'analyse de l'effet thermodynamique pour une poutre poreuse BDFG reposant sur des fondations élastiques, le modèle utilisé dans cette étude peut être appliqué à d'autres cas de poutres de formes géométriques différentes (poutres courbes, poutres à section variable...). Les poutres peuvent être considérées avec ou sans fondations élastiques et soumises à différents cas de charge tels que le flambage, la flexion linéaire et non linéaire. Différents cas d'environnement peuvent également être pris en compte, tels que le chargement

hygrothermique. L'extension de cette étude est également envisagée en considérant l'inclusion des nanotubes en carbone CNTs.

Références bibliographiques

Références

Abouelregal AE, Mohammad-Sedighi H, Faghidian SA, Shirazi AH (2021) Temperature-dependent physical characteristics of the rotating nonlocal nanobeams subject to a varying heat source and a .56-amic load. Facta Universitatis, Series: Mechanical Engineering. 19(4):633dyn https://doi.org/10.22190/FUME201222024A

Akbarzadeh A.H., Abedini A., Chen Z.T., (2015), "Effect of micromechanical models on structural responses of functionally graded plates", *Compos. Struct.* 119, 598–609

Akbaş ŞD (2018) Forced vibration analysis of functionally graded porous deep beams. Compos. Struct. 186: 293–302. https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2017.12.013.

Akbaş ŞD (2017) Post-buckling responses of functionally graded beams with porosities. Steel and Composite Structures. 24(5):579-589. DOI: http://dx.doi.org/10.12989/scs.2017.24.5.579.

Attia A, Bousahla AA, Tounsi A, Mahmoud SR and Alwabli S (2018) A refined four variable plate theory for thermoelastic analysis of FGM plates resting on variable elastic foundation. Structural Engineering and Mechanics, 65(4):453-464. DOI: https://doi.org/10.12989/sem.2018.65.4.453

Avcar M, Mohammed WKM (2018) Free vibration of functionally graded beams resting on Winkler-Pasternak foundation. Arabian Journal of Geosciences 11: 232. https://doi.org/10.1007/s12517-018-3579-2.

Avcar M (2019) Free vibration of imperfect sigmoid and power law functionally graded beams. Steel and Composite Structures. 30(6): 603-615. DOI: http://dx.doi.org/10.12989/scs.2019.30.6.603.

Bary B., Ben Haha M., Adam E., Montarnal P., (2009), "Numerical and analytical effective elastic properties of degraded cement pastes". *Cem. Concr. Res.*, 39(10), 902–912.

Bao G., Wang L., (1995), (1995), "Multiple cracking in functionally graded ceramic/metal coatings", *Int. J. Sol. Struct.* 32(19), 2853–2871.

Babaei H, Eslami MR, Khorshidvand AR (2020) Thermal buckling and postbuckling responses of geometrically imperfect FG porous beams based on physical neutral plane. J. Therm. Stress. 43(1):109–131. https ://doi.org/10.1080/01495 739.2019.16606 00.

Chen D, Yang J and Kitipornchai S (2016a) Free and forced vibrations of shear deformable functionally graded porous beams. International Journal of Mechanical Sciences. 108:14-22. https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2016.01.025.

Chen D, Kitipornchai S, Yang J (2016b) Nonlinear free vibration of shear deformable sandwich beam with a functionally graded porous core. Thin-Walled Struct. 107:39–48. https ://doi. org/10.1016/j.tws.2016.05.025

Ebrahimi F and Jafari A (2016) A Higher-Order Thermomechanical Vibration Analysis of Temperature-Dependent FGM Beams with Porosities. Journal of Engineering. 2016. doi:10.1155/2016/9561504.

Ebrahimi F, Mahmoodi F, Reza Barati M (2017). Thermo-mechanical vibration analysis of functionally graded micro/nanoscale beams with porosities based on modified couple stress theory. Advances in Materials Research. 6(3):279-301. DOI: http://dx.doi.org/10.12989/amr.2017.6.3.279

Ebrahimi F, Jafari A, Selvamani R (2020). Thermal buckling analysis of magneto-electro-elastic porous FG beam in thermal environment. Adv. Nano. Res., 8(1):83. https ://doi.org/10.12989 / anr.2020.8.1.083.

Eltaher MA, Fouda N, El-midany T, Sadoun AM (2018) Modified porosity model in analysis of functionally graded porous nanobeams. J. Braz. Soc. Mech. Sci. Eng. 40(3):141. https://doi.org/10.1007/s40430-018-1065-0.

Fazzolari FA (2018) Generalized exponential, polynomial and trigonometric theories for vibration and stability analysis of porous FG sandwich beams resting on elastic foundations. Composites Part B Engineering. 136:254-271. https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2017.10.022

Gafour Y, Hamidi A, Benahmed A, Zidour M, Bensattalah T (2020) Porosity-dependent free analysis of FG non-local shear deformation and energy principal. Advances in Nano Research. 8(1):49-58. DOI: http://dx.doi.org/10.12989/anr.2020.8.1.04

Gao K, Huang Q, Kitipornchai S, Yang J (2021) Nonlinear dynamic buckling of functionally graded porous beams. Mech. Adv. Mater. Struct. 28(4):418-429. https ://doi.org/10.1080/15376 494.2019.1567888.

Ghayesh MH (2019) Resonant dynamics of axially functionally graded imperfect tapered Timoshenko beam. J. Vib. Control. 25(2):336–350. https://doi.org/10.1177/1077546318777591.

Hadji L and Avcar M (2021) Nonlocal free vibration analysis of porous FG nanobeams using hyperbolic shear deformation beam theory. Advances in Nano Research. 10(3):281-293. DOI: http://dx.doi.org/10.12989/anr.2021.10.3.281.

Hashemi S H, Mehrabani H and Savadkoohi A A (2015) Exact solution for free vibration of coupled double viscoelastic graphene sheets by visco Pasternak medium. Compos. Part B., 78: 377–383. https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2015.04.008.

Hamed MA, Abo-bakr RM, Mohamed SA, Eltaher M A (2020) Influence of axial load function and optimization on static stability of sandwich functionally graded beams with porous core. Engineering with Computers. 36:1929-1946. https://doi.org/10.1007/s00366-020-01023-w.

He CH, Liu C, He JH, Mohammad-Sedighi H, Shokri A, Gepreel KA. (2022) A fractal model for the .77-internal temperature response of a porous concrete. Appl. Comput. Math. 21(1), 71 doi.org/10.30546/1683-6154.21.1.2022.71.

Hieu DV, Chan DQ, Mohammad-Sedighi H (2021) Nonlinear bending, buckling and vibration of functionally graded nonlocal strain gradient nanobeams resting on an elastic foundation. Journal of .Mechanics of Materials and Structures.46-327:(3)16 DOI: 10.2140/jomms.2021.16.327.

Jena SK, Chakraverty S, Malikan M and Mohammad-Sedighi H (2020) Implementation of Hermite-Ritz method and Navier's technique for vibration of functionally graded porous nanobeam embedded in Winkler-Pasternak elastic foundation using bi-Helmholtz nonlocal elasticity. Journal .34-of Mechanics of Materials and Structures. 15(3):405 https://doi.org/10.2140/jomms.2020.15.405.

Jouneghani FZ, Dimitri R, Tornabene F (2018) Structural response of porous FG nanobeams under hygro-thermomechanical loadings. Composites Part B Engineering. 152:71-78. https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2018.06.023.

Liu Y, Su S, Huang H, and Liang Y (2019) Thermal-mechanical coupling buckling analysis of porous functionally graded sandwich beams based on physical neutral plane Compos. B. 168:236–242. DOI: 10.1016/j.compositesb.2018.12.063.

Merzoug M, Bourada M, Sekkal M, Ali Chaibdra A, Belmokhtar C, Benyoucef S and Benachour A. (2020) 2D and quasi 3D computational models for thermoelastic bending of FG beams on variable elastic foundation: Effect of the micromechanical models. Geomech. Eng., 22(4), 361-374. http://dx.doi.org/10.12989/gae.2020.22.4.361.

Meksi A, Benyoucef S, Sekkal M, Bachir Bouiadjra R, Selim MM, Tounsi A, Muzamal H (2021). Influence of micromechanical models on the bending response of bidirectional FG beams under linear, uniform, exponential and sinusoidal distributed loading. Steel and Composite Structures, 39(2) 215-228. DOI: https://doi.org/10.12989/scs.2021.39.2.215

Nebbab M, Ait Atmane H, Bennai R, Tounsi A. (2019) Effect of variable elastic foundations on static behavior of functionally graded plates using sinusoidal shear deformation. Arabian Journal of Geosciences 12: 809. https://doi.org/10.1007/s12517-019-4871-5

Pradhan SC and Murmu T (2009) Thermo-mechanical vibration of FGM sandwich beam under variable elastic foundations using differential quadrature method. J. Sound Vibr. 321:342-362.doi:10.1016/j.jsv.2008.09.018.

Penna R, Feo L, Lovisi G (2021) Hygro-thermal bending behavior of porous FG nano-beams via local/nonlocal strain and stress gradient theories of elasticity. Composite Structures. 263:113627. https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2021.113627.

Reddy J.N., (2000), "Analysis of functionally graded plates". *Int. J. Num. Meth. Eng.* 47, 663-684.

Shahsavari, D., Shahsavari, M., Li, L. and Karami, B. (2018) A novel quasi-3D hyperbolic theory for free vibration of FG plates with porosities resting on Winkler/Pasternak/Kerr foundation. Aerosp. Sci. Tech., 72, 134-149. https://doi.org/10.1016/j.ast.2017.11.004.

She G-L, Liu H-B, and Karami B, (2020) On resonance behavior of porous FG curved nanobeams. Steel and Composite Structures. 36(2):179-186. DOI: https://doi.org/10.12989/scs.2020.36.2.179.

Sobhy M (2015) Thermoelastic response of FGM plates with temperature-dependent properties resting on variable elastic foundations. J. Appl. Mech., **7(6)**:1550082. https://doi.org/10.1142/S1758825115500829.

Tang H, Li L, Hu Y (2018). Buckling analysis of two-directionally porous beam. Aerospace Science and Technology. 78:471-479. https://doi.org/10.1016/j.ast.2018.04.045.

Tlidji Y, Benferhat R and Hassaine Daouadji T (2021) Study and analysis of the free vibration for FGM microbeam containing various distribution shape of porosity. Structural Engineering and Mechanics. 77(2): 217-229. DOI: http://dx.doi.org/10.12989/sem.2021.77.2.217.

Trinh LC, Vo TP, Thai HT and Nguyen TK (2018) Size-dependent vibration of bi-directional functionally graded micro-beams with arbitrary boundary conditions. Compos. Part B Eng., 134:225-245. https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2017.09.054

Valmik Bhavar et al IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering 229 page 2 (2017) 012021

Winkler E (1867) Die Lehre von der Elasticitaet und Festigke. Prag, Dominicus

Wu D, Liu A, Huang Y, Huang Y, Pi Y, Gao W (2018). Dynamic analysis of functionally graded porous structures through finite element analysis. Eng. Struct., 165:287–301. https ://doi.org/10.1016/j.engstruct.2018.03.023

Younesian D, Hosseinkhani A, Askari, ., Esmailzadeh, E (2019) Elastic and viscoelastic foundations: review on linear and nonlinear vibration modeling and applications. Nonlinear Dyn., 97, 853–895. https://doi.org/10.1007/s11071-019-04977-9.

Zghal S, Ataoui D and Dammak F (2020) Static bending analysis of beams made of functionally graded porous materials. Mechanics Based Design of Structures and Machines. 1-18, https://doi.org/10.1080/15397734.2020.1748053.

Zghal S and Dammak F (2020) Vibrational behavior of beams made of functionally graded materials by using a mixed formulation. Proc I Mech E Part C: J Mechanical Engineering Science, In press. https://doi.org/10.1177/0954406220916533.